Thomas Rupp, 17. April 1999

Beweis des Kugelvolumens und -oberfläche nach Archimedes

Vorbereitung zum Proseminar unter Professor Lang

1 Kugeloberfläche

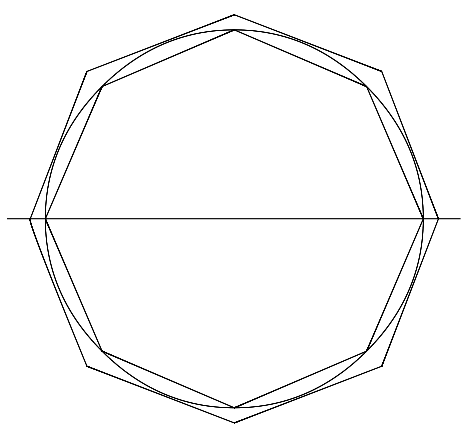

Bild1

Bild1 zeigt einen Gorsskreis einer Kugel, in welchen zwei regelmäßige Polygone ein- bzw. umschrieben sind. Die Seitenzahl der Polygone ist immer durch 4 teilbar, damit wir später die Kugel kontinuierlich in (Seitenzahl:2) Kegel(-stümpfe) zerlegen können. Kreis und Polygone rotieren nun einmal um die gegebene Achse. Der Rotationskörper des Kreises ist nun die gewünschte Kugel. Die Rotationskörper der beiden Polygone werden nun als Summe von Kegelstümpfen aufgefasst, so wie in Bild2 angedeutet.

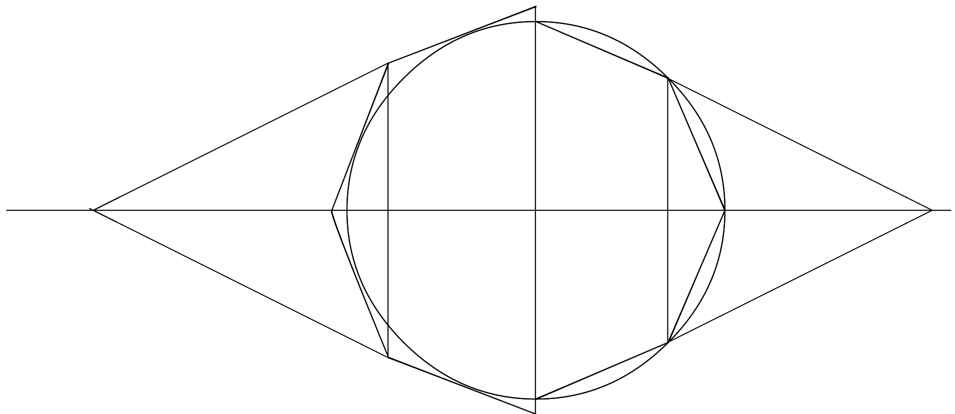

Bild2

Wir erhalten also eine Kugel, die zwischen zwei Körper eingefasst ist. Um ihre Oberfläche zu bestimmen (die ja schon durchd ie Hebelarmmethode bekannt ist), ist folgendes zu zeigen:

1. die Mantelfäche der Kegelstümpfe bestimmen
2. die Oberfläche all dieser zu summieren
3. zu zeigen, dass für unendlich viele Kegelstümpfe die Differenz dieser beiden Summen 0 ist
4. zu beweisen, dass der Grenzwert dieser Summe gleich 4 Grosskreisen der Kugel ist

Hat man dies gezeigt, so steht fest, dass die Oberfläche der Kugel nicht echt größer und nicht echt kleiner als 4 Grosskreise der Kugel ist. Somit ist bewiesen, dass sie genau $4\pi r^2$ beträgt.

Da die Mantelfläche eines Kegels die Differenz zweier Kegel mit gemeinsamer Spitze und gemeinsamen Mantel, aber unterschiedlicher Höhe ist, müssen wir erst die Mantelfäche eines einfachen Kegels bestimmen. Dazu gehen wir genauso vor, wie bei dem jetzigen Problem. Wir approximieren einen Kegel durch zwei Pyramiden. Eine wird dem Kegel einbeschrieben, die andere dem Kegel umschrieben. So dann wird die Anzahl der Dreiecke pro Pyramide erhöt. Der Grenzwert der Summe der Oberflächen aller Dreiecke ergibt dann die gwunschte Mantelfläche des Kegels. Da die Grenzwerte der beiden Pyramiden identisch ist, ist auch die Mantelfläche des Kegels eindeutig bestimmt. Da dies jedoch nur ein Hilfsmittel des Beweises ist, brauch dieser Beweis hier nicht weiter erläutert werden. Der

Grenzwert und somit die Mantelfläche eines Kegels ist der Umfang des Grundkreises multipliziert mit der Seitenlinie des Kegels:

$$M = 2\pi rs\frac{1}{2} = \pi rs \tag{1}$$

Da unser Ziel das vierfache einer Kreisfläche ist, ist es günstiger auch mit solchen Größen zu rechnen. Daher definieren wir $t^2 := rs$. t ist $\sqrt{rs}$, also die mittlere Proportionale von r uns s. Dann können wir wie ARCHIMEDES formulieren, dass die Manteloberfläche eines Kegels gleich der Fläche eines Kreises ist, dessen Radius die mittlere Proportionale von Seitenlinie des Kelgels und Radius seines Grundkreises ist.

Jetzt können wir auch leicht die Manteloberfläche eines Kegelstumpfes berechnen: er ist gleich der Differenz zweier Kegel mit gemeinsamer Spitze und Seitenlinie, aber unterschiedlicher Höhen (und daher auch Radien).

Sei r_1 der Radius und $s_1 + s_2$ die Seitenlinie des größeren Kegels und r_2 der Radius und s_2 die Seitenlinie des kleineren Kegels. Die Differenz beider Kegel ist der gewünschte Kegelstumpf. Mit Hilfe des Strahlensatzes folgern wir:

$$\begin{array}{lrcl} & \frac{s_2}{r_2} & = & \frac{s_1+s_2}{r_1} \\ \Leftrightarrow & s_2 r_1 & = & s_2 r_2 + s_1 r_2 \\ \Leftrightarrow & s_2(r_1 - r_2) & = & s_1 r_2 \\ \Leftrightarrow & s_2 & = & \frac{s_1 r_2}{r_1 - r_2} \end{array}$$

Wir erhalten also die Beziehung:

$$\Leftrightarrow s_2 \quad = \quad \frac{s_1 r_2}{r_1 - r_2} \tag{2}$$

Nach (1) kennen wir bereits die Mantelfläche des großen Kegels. Von diesem ziehen wir nun den kleinen Kegel ab und erhalten für den Kegelstumpf die Gleichung: $M = \pi r_1(s_1 + s_2) - \pi r_2 s_2$. Wir setzen (2) ein und erhalten:

$$\begin{array}{lrcll} & M & = & \pi r_1 s_1 + r_1 s_2 - \pi r_2 s_2 & \\ \Leftrightarrow & M & = & \pi(r_1 s_1 + s_2(r_1 - r_2)) & \\ \Leftrightarrow & M & = & \pi(r_1 s_1 + s_1 r_2) & (2) \\ \Leftrightarrow & M & = & \pi(s_1(r_1 + r_2)) & \end{array}$$

Wir erhalten also die allgemeine Gleichung für die Kegeloberfläche:

$$M = \pi s_1(r_1 + r_2) \tag{3}$$

Somit wäre der erste Punkt des Beweises abgeschlossen. Im folgenden geht es darum, die Summe der Mantelflächen aller Kegelstümpfe zu bestimmen.

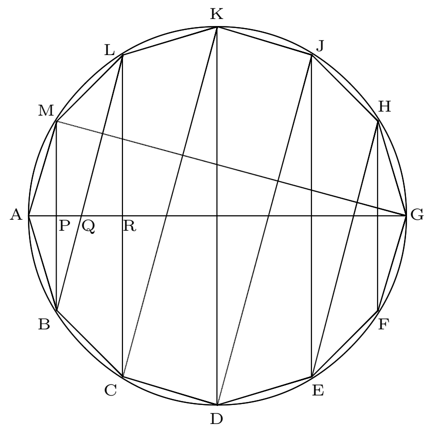

Bild3

Da in den Kreis ein regelmäßiges Polygon einbeschrieben wurde, sind alle Seitenflächen gleich. Daher können wir die zu bildene Summe gut vereinfachen: $\pi(s(0+r_1)+s(r_1+r_2)+s(r_2+r_3)+...) = \pi s(0+2r_1+2r_2+...)$. Zusammengefasst können wir sagen, dass die Mantelfläche aller Kegelstümpfe gleich der Fläche eines Kreises ist, dessen Radius im Quadrat gleich dem Rechteck ist, welches aus einer Polygonseite und der Summe aller Kegeldurchmesser gebildet wird (Bild3).

Sei $r^2 := s(2r_1 + 2r_2 + ...)$ Dann ist $O_{Kugel} = \pi \cdot r^2$, wobei das die Fläche eines Kreises mit dem Radius r ($= \sqrt{s(0 + 2r_1 + 2r_2 + ...)}$ ist. Da das Ergebnis ja schon bekannt ist, ist nun noch zu beweisen, dass die π mal die Fläche des Rechtecks kleiner gleich der vierfachen Fläche eines Grosskreises der Kugel ist (also $\pi 4r^2$ bzw. πd^2).

Für eine einfache Grenzwertbetrachtung ist der Ausdruck noch zu unhandlich, da bei steigender Seitenzahl des einbeschriebenen Polygons die Seitenfläche immer kleiner werden, wird die Summe der Durchmesser immer größer. Daher tun wir folgendes: Das Rechteck wird in der Art umgeformt, dass die kleinere Seite (s) antiproportional zur größeren Seite (Summe der Durchmesser der Kegel) verkleinert wird, bis eine Seite dem Durchmesser der Kugel (= Druchmesser eines Grosskreises) entspricht.

Dazu wird in das eingezeichnete Polygon Dreiecke gezeichnet, so wie in Bild3 gezeigt. Die diagonal direkt gegenüeberliegenden Endpunkte der Kegelradien werden miteinander verbunden. Dadurch entstehen lauter rechtwinklige, zueinander ähnliche[1] Dreiecke wie APM, BPQ, QRL usw. Dazu kommt noch das Dreieck

[1] Die Diagonalen sind alle parallel zu der Polygonseite AM. Daraus folgt, dass die Winkel zwischen der Hypotenuse und der Teilseite von AG immer gleich. Die prallelität sieht man daran, dass das Trapez AMLB symmetrisch ist, da die Winkel zwischen AM und ML, sowie

AGM, welches ebenfalls ähnlich[2] zu den oben definierten Dreiecken ist,

Addiert man die Katheten aller Dreiecke AP, PO, QR usw., erhält man die gesamte Diagonale AG.

Aus den Ähnlichkeiten folgt, dass z.B. sich PM zu PA genauso verhält, wie MG zu AM (da ja das kleine Dreieck APM ähnlich zu AGM ist). Addiert man alle Verhältnisse auf, dann verhalten sie sich zum Kugeldurchmesser genauso, wie MG zu AM. Wir können folgende Gleichung konstruieren:

$$\begin{aligned}
&\frac{PM}{PA} = \frac{PB}{PQ} = \frac{BL}{BQ} = ... = \frac{MG}{AM} \\
\Leftrightarrow &PM \cdot AM = PA \cdot MG = PB \cdot AM = PQ \cdot MG = ... \\
\Leftrightarrow &AM(PB + PB + ...) = MG(PA + PQ + ...) \\
\Leftrightarrow &AM(MB + LC + ...) = MG(AG) \\
\Leftrightarrow &\frac{MB + LC + KD + JE + HF)}{AG} = \frac{MG}{AM}
\end{aligned}$$

Um die Proportionen zwischen dem Rechteck, welches aus einer Polygonseite und der Summe aller Kegeldurchmesser gebildet wird und dem Quadrat des Durchmessers herzustellen, stellen wir die Gleichung um:

$$Rechteck = AM \cdot (MB + LC + KD + JE + HE) = MG \cdot AG \tag{4}$$

$$\Rightarrow s(2r_1 + 2r_2 + ...) = MG \cdot AG \tag{5}$$

$$MG \cdot AG \leq d^2 \tag{6}$$

Somit ist bewiesen, dass die Oberfläche des der Kugel einbeschriebenen Roationskörpers kleiner der Oberfläche der Kugel ist.

Genauso verfährt man mit dem der Kugel umschriebenen Körper. Zeichnet man die Dreiecke wie in Bild4, nur mit der Ausnahme, dass die Punkte A,B,...,M nicht innerhalb (nicht auf), sondern ausserhalb der Kugel liegen. Die die Strecke AG dann größer als der Kugelradius ist, ist auch das Rechteck $s(2r_1 + 2r_2 + 2r_3 + ...) \geq d^2$, wobei d der Durchmesser der Kugel ist. Dann gilt:

$$MG \cdot AG \geq d^2 \tag{7}$$

zwischen AB und BC gleich sind

[2] es ist deswegen ähnlich, weil es den Winkel zwischen AM und AP und einen rechten Winkel (Satz des Thales) mit den anderen Dreiecken gemeinsam hat

Aus (7) und (8) folgt, dass die Oberfläche einer Kugel exakt πd^2 beträgt, da die Strekce MG beliebig klein gewählt werden kann. Da die Verhältnisse für alle möglichen Strecken MG gelten, ist die Oberfläche eindeutig bestimmt.

2 Kugelvolumen

Mit dem Kugelinhalt verfährt man auf ähnliche Weise. Man nähert die Kugel von innen und außen mit vielen Kegeln an, die alle im Kugelmittelpunkt ihre gemeinsame Spitze finden. Für die Grenzwertbetrachtung erhählt man das Volumen eines Kegels, der die Kreisoberfläche als Grundfläche und dem Kugelradius als Höhe besitzt. Das das Kegelvolumen bekannt ist ($\frac{1}{3}Gh$), erhält man die Gleichung ($\frac{1}{3}4\pi r^2 r$). Was man sich so sehr anschaulich vorstellen kann, muss natürlich erst noch gezeigt werden. Dazu betrachten wir uns Bild4.

Wir werden nun zeigen, dass das Volumen des Rotationskörpers MXL identisch mit dem Volumen eines Kegels ist, dessen Grundfläche der Mantel des Kegelstumpfes BCLM und dessen Höhe das Lot von X auf ML (also h) ist.

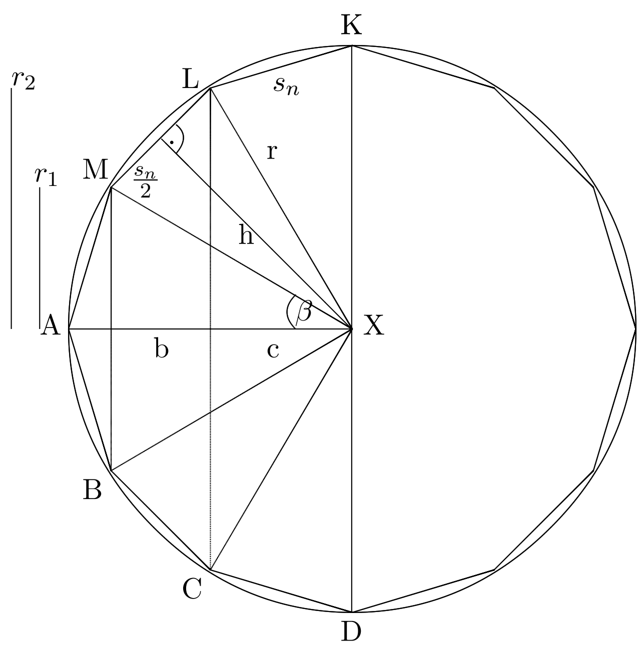

Bild4

Dazu benutzen wir folgende Zusammenhänge:

$$\beta = (\frac{360°}{n}) \quad \alpha := i\beta, \gamma := (i-1)\beta \quad h = r\cos\frac{\beta}{2}$$
$$r_1 = r\sin\gamma \qquad r_2 = r\sin\alpha$$
$$c = r\cos\alpha \quad b = r\cos\gamma - r\cos\alpha \quad s_n = 2r\sin\frac{\beta}{2}$$
$$V_{CLX} = \frac{\pi}{3}r_2^2c \quad V_{BXM} = \tfrac{\pi}{3}r_1^2(b+c) \quad V_{BCLM} = \frac{\pi}{3}b(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)$$
$$V_R = V_{CLX} + V_{BCLM} - V_{BXM} \quad \text{(Der Rotationskörper)}$$
$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{3}s_nh(r_1+r_2) \quad \text{(der gesuchte Kegel)}$$

Nun gilt es nurnoch, die oben aufgeführten Größen in V_R einzusetzen und zu zeigen, dass dieser Ausdruck mit dem des gewünschten Kegels übereinstimmt:

$$\begin{aligned}
V_R =& V_{CLX} + V_{BCLM} - V_{BXM}\\
=&\frac{\pi}{3}\left[(r_2^2c) + (b(r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2)) - (r_1^2(b+c))\right]\\
=&\frac{\pi}{3}\left[r_2^2c + br_1^2 + br_1r_2 + br_2^2 - r_1^2b - r_1^2c\right]\\
=&\frac{\pi}{3}\left[r_2^2c + br_1r_2 + br_2^2 - r_1^2c\right]\\
=&\frac{\pi}{3}\left[br_2(r_1+r_2) + c(r_2^2 - r_1^2)\right]\\
=&\frac{\pi}{3}\left([(r\cos\gamma - r\cos\alpha)r\sin\alpha]\,[r\sin\gamma + r\sin\alpha] + r\cos\alpha\left[(r\sin\alpha)^2 - (r\sin\gamma)^2\right]\right)\\
=&\frac{\pi r^3}{3}\left[(\cos\gamma - \cos\alpha)\sin\alpha(\sin\gamma + \sin\alpha) + \cos\alpha(sin^2\alpha - \sin^2\gamma)\right]\\
=&\frac{\pi r^3}{3}\left[\cos\gamma\sin\alpha\sin\gamma + \cos\gamma\sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin^2\gamma\right]\\
=&\frac{\pi r^3}{3}[\sin\alpha(\cos\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\sin\gamma) + \sin\gamma(\cos\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\sin\gamma)]\\
=&\frac{\pi r^3}{3}[\sin\beta(\sin\gamma + \sin\alpha)] \qquad \text{da: } (\cos\gamma\sin\alpha - \cos\alpha\sin\gamma) = \sin(\alpha-\gamma) = \sin\beta\\
=&\frac{\pi r^3}{3}\left[(2\sin\frac{\beta}{2})(\cos\frac{\beta}{2})((\sin\gamma) + (\sin\alpha))\right] \qquad \text{da: } \sin\beta = \sin 2\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\\
=&\frac{\pi}{3}\left[(2r\sin\frac{\beta}{2})(r\cos\frac{\beta}{2})((r\sin\gamma) + (r\sin\alpha))\right]\\
=&\frac{\pi}{3}[s_nh(r_1+r_2)]\\
=&\frac{\pi}{3}s_nh(r_1+r_2)\\
=&V_{Kegel}
\end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der Behauptung gezeigt.

Der Roationskörper, der durch die Rotation der Dreiecke AXM, MXL, LXK, etc. entsteht, entspricht immer dem eines Kegels mit der Mantelfläche des entsprechenden Kegelstumpfes (ABM,BCLM,CDKL, etc) mit der entsprechnden Höhe. Da die Höhe immer kleiner als der Radius und die Summe der Mantelflächen des einbeschriebenen Polygons immer kleiner als die der Radius bzw. die Oberfläche der Kugel sind, ist auch das Volumen kleiner. Analog ist das Volumen des durch die umschriebenen Polygone erzeugten Rotationskörpers immer größer als das der Kugel (die Seitenflächen s_n werden nach außen geschoben, die Winkel und Verhältnisse bleiben gleich, nur r und h sind funktional vertauscht. Das Gesamtvolumen ist aber stets größer.). Als Grundfläche aller Kegel erhalten wir also die Kugeloberfläche, wenn man die Zahl der einbeschriebenen Polygone gegen Unendlich gehen lässt (wie bei der Oberflächenberechnung bzw. bei der Kreisflchenberechnung). Als Höhe erhalten wir den Radius. Somit kommen wir zu den Gleichungen:

$$V_{Kegel} = \frac{\pi}{3} Gh, G = O_{Kugel} = 4\pi r^2, h = r$$

$$\Rightarrow \sum_i V_{R_i} = \lim_{n\to\infty} V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3} r^3$$