Thomas Rupp, 14. April 1999

Berechnung der Fläche eines geraden Parabelsegments nach Archimedes

Vorbereitung zum Proseminar unter Professor Lang

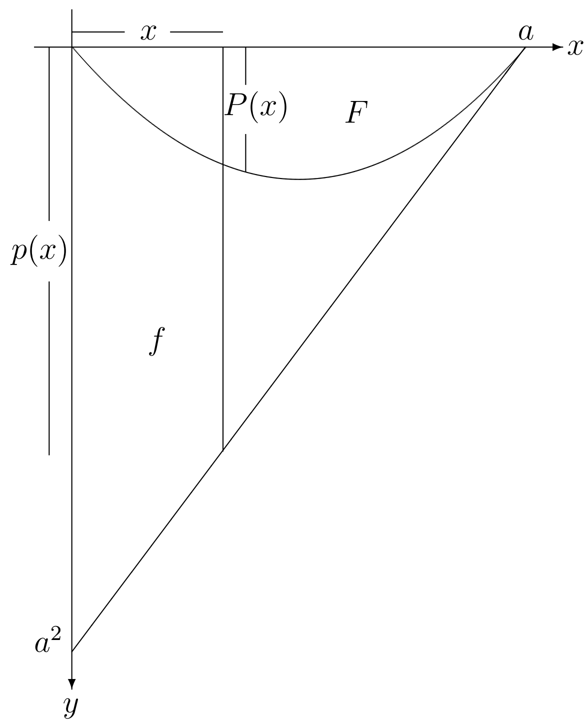

Bild1

Die Behauptung von ARCHIMEDES war, dass man die Fläche eines beliebigen Parabelsegments[1] mit Hilfe eines speziellen, leicht bestimmbaren Dreiecks und dessen Verhältnis zum Parabelsegment berechnen könne.

Wir betrachten uns die oben gegebene Skizze:

[1]Archimedes ging von beliebigen, also auch schiefen Parabelsegmenten aus. Zur Vereinfachung behandlen wir hier nur ein gerades Parabelsegment.

Das beliebige Parabelsegment stellen wir als eine Parabelfunktion dar, die im 1. Quadranten die gesuchte Fläche darstellt. Die Parabel schneidet die x-Achse im Punkt $(0,0)$ und $(a,0)$. Das spezielle Dreieck, mit dessen Hilfe die gesuchte Fläche F des Parabelsegments berechnet wird, habe die Tangente der Parabel im Punkt $(a,0)$ als Hypotenuse und die Fläche f.

Die allgemeine Parabelfunktion (die Parabel ist im negativen offen) lautet: $f(x) = -(x-\alpha)^2 + \beta$. Da wir zwei ihrer Schnittpunkte kennen, können wir die Funktion genauer spezifizieren:

$$f(0) = 0 \Rightarrow -(0-\alpha)^2 + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \alpha^2 \tag{1}$$

$$f(a) = 0 \Rightarrow -(a-\alpha)^2 + \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 2a\alpha = a^2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{2} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erhalten wir unsere Parabelfunktion:

$$f(x) = -(x - \frac{a^2}{2})^2 + \frac{a^4}{4} = xa - x^2 \tag{3}$$

Leiten wir (3) im Punkt $(a,0)$ ab, erhalten wir die Steigung $f'(a) = a - 2a = -a$ in diesem Punkt. Daher schneidet sie die y-Achse also im Punkt $(0, a^2)$

Seien nun $P(x)$ und $p(x)$ die Ordinaten der Parabel bzw. der Tangente zur Abszisse x, wobei offenkundig gilt: $0 \leq x \leq a$. Durch den Strahlensatz erhalten wir das Verhältnis:

$$\frac{a-x}{p(x)} = \frac{a}{a^2} \Leftrightarrow p(x) = a(a-x) \tag{4}$$

Den Wert für $P(x)$ liefert die Parabelfunktion:

$$P(x) = f(x) = x(a-x) \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt das benötigte Verhältnis:

$$\frac{P(x)}{p(x)} = \frac{x(a-x)}{a(a-x)} = \frac{x}{a} \Leftrightarrow P(x)a = p(x)x \tag{6}$$

Fasst man nun beide Flächen als Summe von infinitesimal kleinen Streifen auf, dann lassen sich immer zwei Streifen an die beiden Enden einer Waage hängen, so dass sich diese im Gleichgewichtbefindet *(Bild2)*. Der Angelpunkt der Waage muss so gewählt werden, wie es dem in (6) gegebenen Verhältnis entspricht. Wenn der $P(x)$ auf der linken Seite hängt, dann ist die Gesamtlänge beider Arme a und die Länge des rechten Armes x (und demzufolge die Länge des linken Armes $a-x$).

Wir können das Bild der Waage auch erweitern. Das "Gewicht" des Dreickstreifen multipliziert mit x entspricht immer dem des Parabelsegmentstreifens multipliziert mit dem ganzen Hebelarm. Mit anderen Worten beudeutet dies, dass mit gröser werdendem x die Streifen immer kleiner werden und sich stetig vom Angelpunkt entfernen. Da x alle Werte zwischen 0 und a annimmt, baut sich das Dreieck sozusagen nach rechts hin auf *(Bild3)*.

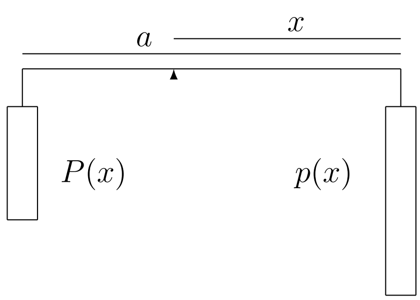

Bild2

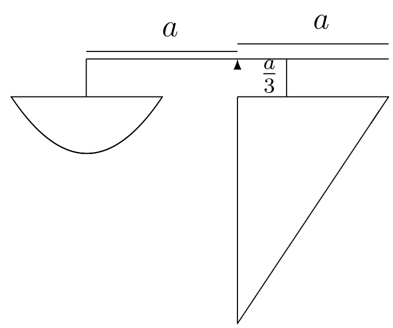

Bild3

Da sich der Schwerpunkt des Dreiecks bei $\frac{a}{3}$ befindet[2] und sich die Waage immernoch im Gleichgewicht befindet, haben wir nun ein Verhältnis der Flächen zueinander, mit denen wir etwas anfangen können. Aus (6) folgt nämlich:

$$\frac{F}{f} = \frac{(a/3)}{a} = \frac{1}{3} \tag{7}$$

Also beträgt die Fläche des Parabelsegments ein Drittel des gegebenen Dreiecks. Nach (7) folgt nun:

$$F = \frac{f}{3} = \frac{1}{2}a^2a\frac{1}{3} = \frac{a^3}{6}$$

Somit währe die Fläche eines beliebigen Parabelsegments zu bestimmen.

$\square$

[2]Die Schwerelinien eines Dreiecks teilen auch seine Seiten im Verhältnis $1:2$. Dies können wir leicht am Strahlensatz nachvollziehen. Das der Schwerpunkt (S) die Schwerelinien im Verhältnis 1:2 teilt, ist bereits bekannt. Nun steht die rechte Oberkante $a-S$ zu $\frac{2}{3}$ der Schwereline vom Mittelpunkt der linken Kante zur rechten Spitze im gleichen Verhältnis, wie die ganze Oberkannte zu ersten Hälfte der linken Kante.