

# Elementare Werkzeuge der Perkolationsstheorie

## Die BK-Ungleichung und Russos Formel

Thomas Rupp  
*thomas@7t7.de*  
Version 1.1

13. Mai 2001

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>BK-Ungleichung</b>	<b>2</b>
3.1	Die Ungleichung . . . . .	2
3.2	Beweisidee . . . . .	2
3.3	Fundament . . . . .	2
3.4	Beweis der BK-Ungleichung . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Russos Formel</b>	<b>5</b>
4.1	Die Formel . . . . .	6
4.2	Beweisskizze . . . . .	6
4.3	Der Beweis . . . . .	6
4.4	Resultat für unendlich viele Kanten . . . . .	8
4.5	Schranke der Änderungsgeschwindigkeit von $P_{p_1}(A)$ . . . . .	9
<b>A</b>	<b>Anmerkungen</b>	<b>10</b>
A.1	Ausweitung der BK-Ungleichung . . . . .	10
A.2	$P( E_{p,\delta}  \geq 2) = o(\delta)$ . . . . .	10
A.3	Anmerkung zu den verwendeten Zufallsvariablen . . . . .	10
A.4	Ableitungen von $P'_p(A)$ . . . . .	10
<b>B</b>	<b>Begriffe</b>	<b>12</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

## 1 Einleitung

Die Perkolationstheorie [lat. *percolare*; durchsickern lassen, durchsehen] beschäftigt sich, wie der Name andeutet, mit der Modellierung des Durchsickerns. Dieses Prinzip ist so allgemein, dass damit Ausbreitung von Flüssigkeiten, Kristallformierungen, Magnetisierung, Ausbreitung von Krankheiten, Elektronentransporte und viele mehr modelliert werden können ([1],[2]).

Wir beschränken uns auf das kanonische Gitter  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$ , dessen Kanten  $\mathbb{E}^d$  die Verbindungen von benachbarten Punkten des  $\mathbb{Z}^d$  sind. Jede Kante ist zufällig und von den anderen unabhängig entweder durchlässig (offen) oder undurchlässig (geschlossen).

Jetzt kann man sich fragen, ob es zwischen bestimmten Punkten eine Verbindung gibt (z.B. eine Flüssigkeit von einem Ort zum anderen gelangen kann) oder es zusammenhängende Cluster bestimmter Größe gibt (Entstehung von Eis). Es lassen sich daneben noch viele weitere Fragen und Problemstellungen finden.

Im folgenden werden wir zwei wichtige und elementare Werkzeuge kennenlernen, um derartige Probleme zu bewältigen. Sie beschreiben zum einen, wie wahrscheinlich es maximal sein kann, dass zwei Ereignisse getrennt voneinander eintreten können, zum anderen, wie sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ändert, wenn sich die Wahrscheinlichkeiten der Durchlässigkeit der Kanten ändert.

## 2 Grundlagen

Zuerst sorgen wir für das Fundament, um das benötigte Gitter auf mathematische Füße zu stellen. Die hier vorgestellten Werkzeuge sind in ihrer Allgemeinheit allerdings immer nur auf eine endliche Anzahl von Kanten anwendbar, so dass wir uns jeweils nur auf einen Teil des  $\mathbb{L}^d$  beschränken.

**Definition 2.1 (Grundraum)** Sei  $\Gamma$  die Menge aller  $(0, 1)$ -wertigen Vektoren  $\omega = (e_1, e_2, \dots, e_m)$  mit der partiellen Ordnung  $\omega_1 \leq \omega_2 \Leftrightarrow \forall i : \omega_1(e_i) \leq \omega_2(e_i)$ . Dabei ist  $m$  die (endliche) Anzahl der für uns notwendigen<sup>1</sup> Kanten. Jedes  $e_i$  steht für eine Kante, welche unabhängig und uniform verteilt mit Wahrscheinlichkeit  $p(i) \in [0, 1]$  durchlässig ( $e_i = 1$ ) bzw. mit  $q(i) := 1 - p(i)$  undurchlässig ( $e_i = 0$ ) ist.

Sprechen wir von der Kantenwahrscheinlichkeit  $p_1$  oder  $p_2$ , so bedeutet das, dass alle Kanten mit Wahrscheinlichkeit  $p_1$  (bzw.  $p_2$ ) durchlässig sind. Benutzen wir dagegen  $p$ , so steht dieses im allgemeinen für einen Vektor  $(p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_m))$  der die individuellen Kantenwahrscheinlichkeiten, jeder Kante durchlässig zu sein, enthält.

Mit der Potenzmenge  $\mathfrak{G}$  und dem Produktmaß  $P_p$  auf  $(\Gamma, \mathfrak{G})$  erhalten wir den zukünftig zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Gamma, \mathfrak{G}, P_p)$ .

Wir können also sagen, dass  $\Gamma$  die Menge aller Zustände von  $m$  aus einem Gitter ausgewählten Kanten ist und somit jeder Vektor aus  $\Gamma$  einen solchen Zustand (von nun an Konfiguration genannt) darstellt. Ereignisse sind dann Elemente aus  $\mathfrak{G}$ .

**Definition 2.2 (aufsteigendes Ereignis)** Ein Ereignis  $A$  ist aufsteigend, wenn für seine Indikatorfunktion gilt

$$\omega_1 \leq \omega_2 \Rightarrow 1_A(\omega_1) \leq 1_A(\omega_2).$$

Daraus sehen wir auch sofort, dass mit den Kantenwahrscheinlichkeiten  $p_1 \leq p_2$  für alle aufsteigenden Ereignisse  $A$  gilt:  $P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A)$ .

<sup>1</sup>um das Eintreten des betreffenden Ereignisses zu beobachten

### 3 BK-Ungleichung

Eine Ungleichung, auf welche wir hier nicht näher eingehen werden, gibt an, dass für aufsteigende Ereignisse  $A, B$  die Wahrscheinlichkeit, dass beide eintreten mindestens das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist; die FKG-Ungleichung:

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Wir fragen uns jetzt, ob dafür eine nicht triviale, obere Schranke existiert. Es stellt sich heraus [2], dass selbst wenn  $A$  und  $B$  nahezu unabhängig voneinander sind, dies nicht möglich ist. Da eine Antwort aber von Bedeutung ist, werden wir eine zusätzliche Bedingung an  $A$  und  $B$  stellen und sehen, wie uns diese zum Ziel führt.

#### 3.1 Die Ungleichung

**Satz 3.1 (BK-Ungleichung)** *Wenn  $A$  und  $B$  aufsteigende Ereignisse in  $\mathfrak{G}$  sind, dann gilt*

$$P_p(A \circ B) \leq P_p(A)P_p(B).$$

Dabei bedeutet  $A \circ B$ , dass  $A$  und  $B$  getrennt voneinander eintreten. In den (meisten) praxisrelevanten Fällen kann die Einschränkung auf endlich viele Kanten sogar fallengelassen werden (siehe hierzu Anhang A.1).

#### 3.2 Beweisidee

Wir fragen uns, wie wahrscheinlich es ist, dass  $A$  und  $B$  disjunkt eintreten. Greifen wir uns eine beliebige Kante  $e$  heraus und spalten diese in zwei Kanten  $e'$  und  $e''$  auf, welche jeweils voneinander unabhängig mit Wahrscheinlichkeit  $p(e)$  durchlässig sind. Nun können wir uns nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass  $A$  und  $B$  immernoch disjunkt eintreten, dabei aber  $A$  nicht  $e''$  und  $B$  nicht  $e'$  benutzt. Diese wird nicht sinken, denn jetzt gibt es weniger Kanten, welche von beiden Ereignissen beansprucht werden können, als vorher. Spalten wir nun sukzessiv alle Kanten auf, so erhalten wir zwei gänzlich voneinander getrennte, unabhängige Kopien, so dass  $A$  und  $B$  natürlich "disjunkt" mit Wahrscheinlichkeit  $P(A)P(B)$  eintreten.

Um diese Idee nun formell umzusetzen, müssen wir etwas Vorarbeit leisten:

#### 3.3 Fundament

**Definition 3.2 (disjunkte Ereignisse)** *Seien  $A, B$  zwei nicht absteigende Ereignisse. Wir bezeichnen mit  $A \circ B$  das disjunkte Eintreten von  $A$  und  $B$ . Dies bedeutet, dass beide Ereignisse eintreten und dabei keine gemeinsamen Kanten benutzen:*

$$A \circ B = \{\omega \in \Gamma \mid \exists \omega_1 \in A, \omega_2 \in B : \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = 0, \omega \geq \omega_1, \omega \geq \omega_2\}$$

**Definition 3.3 (Grundraumkopien)** *Seien  $(\Gamma_1, \mathfrak{G}_1, P_1)$  und  $(\Gamma_2, \mathfrak{G}_2, P_2)$  Kopien des Wahrscheinlichkeitsraums  $(\Gamma, \mathfrak{G}, P_p)$ , welche zusammengesetzt den Produktraum  $(\Gamma_1 \times \Gamma_2, \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2, P_{12})$  bilden. Ein Punkt dieses Produktraumes (also eine Konfiguration beider Kopien) bezeichnen wir mit  $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_m)$ . Das Maß  $P_{12}$  ist das dazugehörige Produktmaß<sup>2</sup>.*

Im weiteren seien alle Konfigurationen aus  $\Gamma$  respektive  $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ .

**Definition 3.4 ( $A', B'_k$ )** *Seien  $A, B$  aufsteigende Ereignisse in  $\mathfrak{G}$ .*

*Dann seien mit  $A' := \{(x, y) \mid x \in A\}$  und  $B'_k := \{(x, y) \mid (y_1, \dots, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in B\}$  für  $0 \leq k < m$  die zu den Kopien gehörigen Ereignisse definiert.*

<sup>2</sup>also  $P_{12}((x, y)) = P_1(x) \cdot P_2(y)$

$A'$  ist somit die kanonische Übertragung des Ereignisses  $A$  in den Produktraum und von  $B$  unabhängig.

$B'_k$  ist das Ereignis, in welchem die ersten  $k$  Kanten aus  $\Gamma_2$  und die restlichen aus  $\Gamma_1$  stammen, sowie zusammengesetzt zum Ereignis  $B$  gehören.  $B'_k$  korrespondiert also mit dem Ereignis aus der Beweisidee, in dem die ersten  $k$  Kanten aufgespalten wurden.

**Definition 3.5 (I erzwingt ein Ereignis)** Für eine Konfiguration  $(x, y)$  sagen wir, dass eine Teilmenge  $I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  das Ereignis  $A'$  erzwingt, wenn

$$\forall i \in I : u_i = x_i \Rightarrow (u, v) \in A'.$$

Also wenn der Status der Kanten  $x_i, i \in I$  ausreicht, um  $A'$  eintreten zu lassen.

Analog sagen wir, für eine Konfiguration  $(x, y)$  erzwingt  $I$  das Ereignis  $B'_k$ , wenn

$$\forall i \in I : (v_i = y_i, i \leq k) \text{ und } (u_i = x_i, i > k) \Rightarrow (u, v) \in B'_k.$$

### 3.4 Beweis der BK-Ungleichung

Die Aufteilung in  $A'$  und  $B'_k$  deutet den Vorgang schon an: wenn diese beiden disjunkt eintreten sollen, bedeutet dies, dass wenn man beide in einer Kopie betrachten würde, diese nur "oberhalb" von  $k$  keine gemeinsamen Kanten benutzen müssen.

Der Beweis beschäftigt sich dann hauptsächlich damit, dass wenn  $k$  steigt, die Wahrscheinlichkeit, dass diese beide Ereignisse disjunkt eintreten auch nur steigen kann.

#### Beweis

Einerseits ist nach Definition 3.4

$$P_p(A \circ B) = P_{12}(A' \circ B'_0), \quad (1)$$

andererseits ist das Ereignis  $A' \circ B'_m$  auf zwei disjunkten, voneinander unabhängigen Kopien definiert und deswegen ist

$$P_{12}(A' \circ B'_m) = P_{12}(A')P_{12}(B'_m) = P_p(A)P_p(B). \quad (2)$$

Betrachten wir (1) und (2), so müssen wir nurnoch zeigen, dass

$$P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) \leq P_{12}(A' \circ B'_k) \text{ für } 1 \leq k \leq m.$$

Dies entspräche dem Nachweis, dass ein Aufspalten der  $k$ -ten Kante (die  $k-1$  Kanten davor wurden schon aufgespalten) die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des in der Beweisidee vorgestellten Ereignisses nicht vermindert.

Der restliche Beweis beschäftigt sich damit.

Dazu sehen wir uns das Ereignis  $A' \circ B'_{k-1}$  näher an. Dies sind alle Konfigurationen, in denen  $A'$  und  $B'_{k-1}$  eintreten und beide Ereignisse keine gemeinsamen Kantenkoordinaten  $\geq k$  besitzen. Anhand dieser  $k$ -ten Kante untersuchen wir die Menge weiter, in dem wir sie zuerst in zwei verschiedene Partitionen aufteilen:  $A' \circ B'_{k-1} = C_1 \cup C_2$ , mit

$$C_1 = \{(x, y) | A' \circ B'_{k-1} \text{ tritt bei } x_k = 0 \text{ und auch bei } x_k = 1 \text{ ein}\}, \quad (3)$$

$$C_2 = \{(x, y) | x_k = 1 \text{ und } A' \circ B'_{k-1} \text{ tritt genau dann ein, wenn } x_k = 1\} \quad (4)$$

Entscheidend wird eine weitere Unterteilung von  $C_2$  in  $C'_2$  und  $C''_2$ :

$$C'_2 = C_2 \cap \{(x, y) | \exists I \subseteq \{1, 2, \dots, m\}, \quad (5)$$

$$k \in I, I \text{ erzwingt } A' \text{ und } \hat{I}_{k-1} \text{ erzwingt } B'_{k-1}\},$$

$$C''_2 = C_2 \setminus C'_2 \quad (6)$$

$$\text{mit } \hat{I}_{k-1} := \{k, k+1, \dots, m\} \setminus I \cup \{1, 2, \dots, k-1\}.$$

Um uns die Bedeutungen der Mengen zu veranschaulichen, betrachten wir einige Beispiele. In den folgenden Darstellungen sind die Kanten der  $2 \times 3$  Gitter in natürlicher Reihenfolge nummeriert (von links nach rechts, von unten nach oben). Durchgezogene Kanten liegen in der ersten Kopie  $\Gamma_1$ , gepunktete in  $\Gamma_2$ . Das Ereignis  $A$  tritt ein, wenn die linken Eckpunkte verbunden sind,  $B$  bei einer Verbindung der rechten Eckpunkte.

In Worten stellt  $C_1$  diejenige Menge von Konfigurationen dar, bei der  $A' \circ B'_{k-1}$  eintritt, die Kante  $x_k$  aber nicht genutzt werden muss (siehe (3) und Abbildung 1). Die Menge  $C'_2$  enthält diejenigen Konfigurationen, in denen  $x_k$  ausschlaggebend für das Ereignis  $A'$ , respektive  $A$  ist (siehe (5) und Abbildung 2).

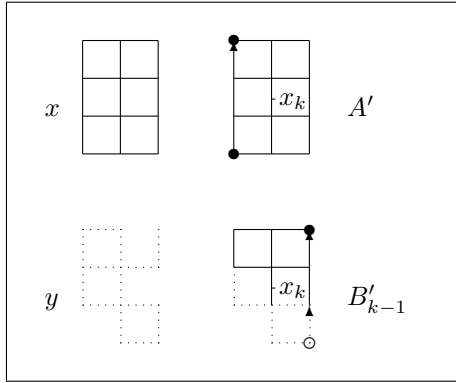


Abbildung 1:  $C_1$ . Hier ist die Kante  $x_k$  für die Verbindung der linken bzw. rechten Ecke irrelevant.

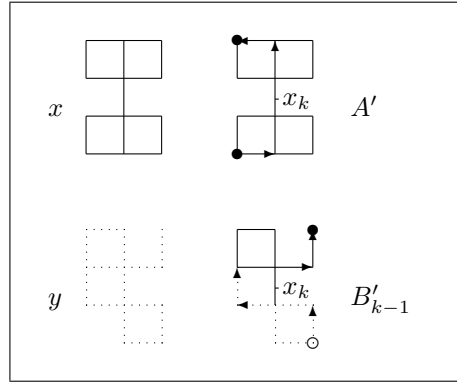


Abbildung 2:  $C'_2$ . Damit  $A'$  eintritt, muss die Kante  $x_k$  genutzt werden.  $B'_{k-1}$  benötigt sie nicht.

Den Rest stellen die Konfigurationen da, bei denen  $x_k$  verantwortlich für das Eintreten des Ereignisses  $B'_{k-1}$  sind und für  $A'$  somit keine Rolle spielen. Siehe auch (6) und Abbildung 3.

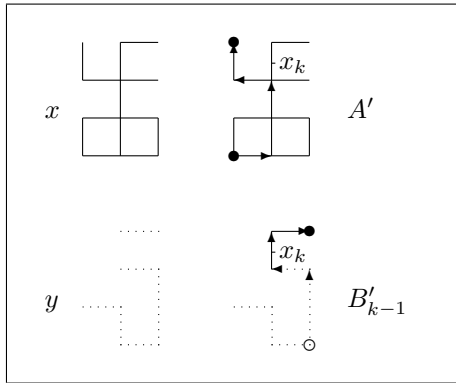


Abbildung 3:  $C''_2$ . Nun muss die Kante  $x_k$  für  $B'_{k-1}$  verwendet werden. Für  $A'$  ist sie nicht nötig.

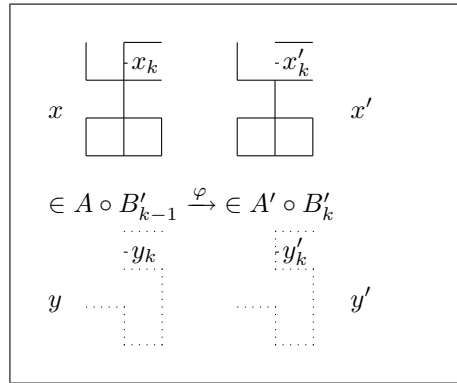


Abbildung 4: Wenn  $\varphi$  nicht die Identität ist, tauscht sie den Status der jeweils  $k$ -ten Kante zwischen den beiden Kopien aus.

Wir werden nun eine maßerhaltende, injektive Abbildung  $\varphi : A' \circ B'_{k-1} \rightarrow A' \circ B'_k$  konstruieren. Haben wir das erreicht, so haben wir

$$\varphi(A' \circ B'_{k-1}) \subseteq A' \circ B'_k \Rightarrow P_{12}(A' \circ B'_{k-1}) = P_{12}(\varphi(A' \circ B'_{k-1})) \leq P_{12}(A' \circ B'_k).$$

Diese Funktion  $\varphi$  vertauscht den Status der Kanten  $x_k$  und  $y_k$  genau dann, wenn  $(x, y)$  aus  $C_2''$  ist. In Zeichen

$$\begin{aligned} \varphi & : A' \circ B'_{k-1} \rightarrow A' \circ B'_k \\ \varphi((x, y)) & = \begin{cases} (x', y') & \text{wenn } (x, y) \in C_2'', \\ (x, y) & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Mit  $x' := (x_1, \dots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$  und  $y' := (y_1, \dots, y_{k-1}, x_k, y_{k+1}, \dots, y_m)$ .

Überprüfen wir zuerst, ob  $\varphi$  wirklich  $A' \circ B'_{k-1}$  in  $A' \circ B'_k$  hinein abbildet:

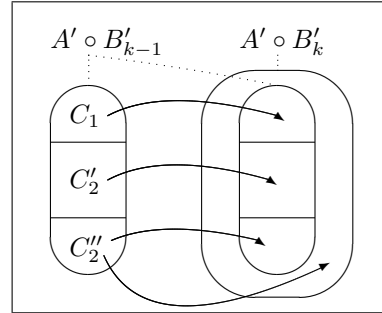
Bei  $C_1$  ist der Wert von  $x_k$  für das Eintreten von  $A' \circ B'_{k-1}$  nicht relevant. Also weder für  $A'$  noch für  $B'_{k-1}$ . Und daher ist der Wert  $y_k$  auch für  $B'_k$  irrelevant und beide Ereignisse treten disjunkt ein (Abbildung 1).

Bei  $C_2'$  ist  $x_k = 1$  und entscheidend für  $A'$  und  $\varphi$  ist die Identität. Also gibt es für  $A'$  keine Veränderung und  $B'_k$  tritt auch ein, da das Eintreten von  $B'_{k-1}$  nicht vom Status von  $x_k$  abhing (Abbildung 2). Sie treten disjunkt ein, da weniger gemeinsame Kanten in  $\Gamma_1$  liegen.

In  $C_2''$  ist  $x_k$  entscheidend für  $B'_{k-1}$  und somit irrelevant für  $A'$  (es ist für  $A'$  egal, ob nun  $x'_k = 1$  oder  $x'_k = 0$ ). Da in  $C_2$  immer  $x_k = 1$  gilt, ist nun  $y'_k = 1$ . Demnach muss  $B'_k$  auch eintreten, da für  $B'_k$  jetzt die Kante  $y'_k$  statt  $x_k$  verwendet werden kann und diese in jedem Fall durchlässig ist. Siehe hierzu auch Abbildungen 3, und 4. Wie sonst müssen auch hier beide Ereignisse disjunkt sein, da die gemeinsamen Kanten abnehmen.

Um die Injektivität von  $\varphi$  nachzuweisen, reicht es aus zu zeigen, dass für alle  $(x, y) \in C_2''$  mit  $x_k = 1, y_k = 0$  gilt:  $(x', y') \in (A' \circ B'_k) \setminus (C_1 \cup C_2')$ , da  $\varphi$  in den übrigen Fällen die Identität ist und Vertauschungen eindeutig sind (vergleiche hierzu auch nebenstehende Abbildung).

Zum einen ist  $(x', y') \notin C_2$ , da  $x'_k = 0$ , andererseits (siehe Abbildung 4) kann nicht  $(x', y') \in C_1$  sein, da  $x_k = 1$  entscheidend für  $B'_{k-1}$  war und  $A' \circ B'_{k-1}$  somit nichtmehr eintritt.



Zum Schluss halten wir noch fest, dass  $\varphi$  maßerhaltend ist, da es entweder die Identität ist oder aber in beiden Konfigurationen je den Status einer durchlässigen und einer undurchlässigen Kante vertauscht:

$$P_{12}(\varphi((x, y))) = \underbrace{\frac{q}{p}}_{\Delta\Gamma_1} P_{12}((x, y)) \underbrace{\frac{p}{q}}_{\Delta\Gamma_2} = P_{12}((x, y)).$$

□

## 4 Russos Formel

Es interessiert uns nun, wie stark sich die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Ereignisses verändert, wenn wir die Wahrscheinlichkeit, dass (alle oder manche) Kanten durchlässig sind, erhöhen.

### 4.1 Die Formel

**Satz 4.1 (Russos Formel)** *Sei  $A \in \mathfrak{G}$  ein aufsteigendes Ereignis. Dann ist*

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = E_p(N(A)),$$

wobei  $N(A)$  die Anzahl der für  $A$  entscheidenden<sup>3</sup> Kanten ist.

Somit lässt sich das Resultat auch schreiben als

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \sum_e P_p(e \text{ ist entscheidend für } A).$$

### 4.2 Beweisskizze

Eine Idee, wie man an dieses Problem herangeht, kann folgendermaßen aussehen: Sei  $X = (X_1, \dots, X_m)$  ein Vektor von unabhängigen, aus  $[0, 1]$  gleichverteilten Zufallsvariablen, welche jeweils angeben, ob eine Kante  $e_i$  durchlässig ( $X_i < p_i$ ) oder undurchlässig ist.

Zur Vereinfachung benutzen wir dann als Abkürzung:

**Definition 4.2 (Konfigurationsbeschreibung)** *Für alle Kanten  $e_i$  ist  $\eta_p(e_i) = 1$  genau dann, wenn  $e_i$  durchlässig ist; ansonsten gilt  $\eta_p(e_i) = 0$ .*

Fehlt das Argument, so beschreibt  $\eta_p$  eine vollständige, durch Auswertung (Realisation) der Zufallsvariablen gewonnene (also gemäß der  $X_i$  zufällig gewählte und von  $p$  abhängige) Konfiguration aus  $\Gamma$ . Siehe Anhang A.3 und Abbildung 6 zur genaueren Differenzierung zwischen den Zufallsvariablen und Konfigurationsbeschreibung.

Somit ist dann

$$P_{p+\delta}(A) - P_p(A) = P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A). \quad (7)$$

Also muss es eine Kantenmenge  $E_{p,\delta}$  geben, deren Kanten bei  $p$  undurchlässig, bei  $p + \delta$  aber durchlässig und somit für das Eintreten von  $A$  "essentiell" sind. Da  $P(|E_{p,\delta}| \geq 2) = o(\delta)$  können wir annehmen, dass es nur eine solche Kante  $e_i$  gibt (siehe Anhang A.2).  $A$  tritt also nur ein, wenn  $e_i$  durchlässig ist, sonst nicht. Da die  $X$  gleichverteilt aus  $[0, 1]$  ist, haben wir

$$P(p \leq X_i < p + \delta)P_p(e_i \text{ ist essentiell für } A) = \delta P_p(e_i \text{ ist essentiell für } A) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \sum_e \delta P_p(e \text{ ist essentiell für } A) \approx P(\eta_p \notin A, \eta_{p+\delta} \in A)^4 \quad (9)$$

$$\stackrel{(7)}{\Rightarrow} \frac{P_{p+\delta}(A) - P_p(A)}{\delta} \approx \sum_e P_p(e \text{ ist essentiell für } A) \quad (10)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}P_p(A) \approx \sum_e P_p(e \text{ ist essentiell für } A) \quad \text{wenn } \delta \downarrow 0 \quad (11)$$

### 4.3 Der Beweis

**Definition 4.3 (entscheidende Kante)** *Sei  $A$  ein beliebiges Ereignis in  $\mathfrak{G}$  und  $w$  eine Konfiguration. Eine Kante  $e$  ist entscheidend für das Paar  $(A, \omega)$ , wenn  $I_A(\omega) \neq I_A(\omega')$ . Dabei sind  $\omega'$  und  $\omega$  identisch mit Ausnahme der Kante  $e$ , die ihren Status wechselt.*

<sup>3</sup>was eine entscheidende Kante ist, werden wir gleich in 4.3 genau definieren

<sup>4</sup>Da wir angenommen haben, dass es genau eine essentielle Kante gibt (hier entsteht die Ungenauigkeit in (9)), müssen wir (8) nur über alle (in Frage kommenden) Kanten summieren.

Die Kante  $e$  ist also dahingehend entscheidend für  $A$ , dass dessen Indikatorfunktion vom Status von  $e$  abhängt. Das Ereignis “ $e$  ist entscheidend für  $A$ “ hängt dagegen nur von den anderen Kanten ab.

Da wir uns nun nur für aufsteigende Ereignisse interessieren, ist die Eigenschaft “entscheidend für  $A$ “ einer Kante äquivalent zu der Eigenschaft “essentiell für  $A$ “ (aus der Beweisskizze):  $A$  tritt nicht ein, wenn  $e$  undurchlässig ist,  $A$  tritt jedoch ein, wenn sie durchlässig ist.

In Abbildung 5 sehen wir zwei Beispiele für entscheidende Kanten. Entweder tritt das jeweilige Ereignis ein und diejenigen Kanten sind entscheidend, welche das Eintreten verhindern, sobald eine von ihnen undurchlässig wird, oder das Ereignis tritt nicht ein, solange nicht wenigstens eine der entscheidenden Kanten durchlässig wird.

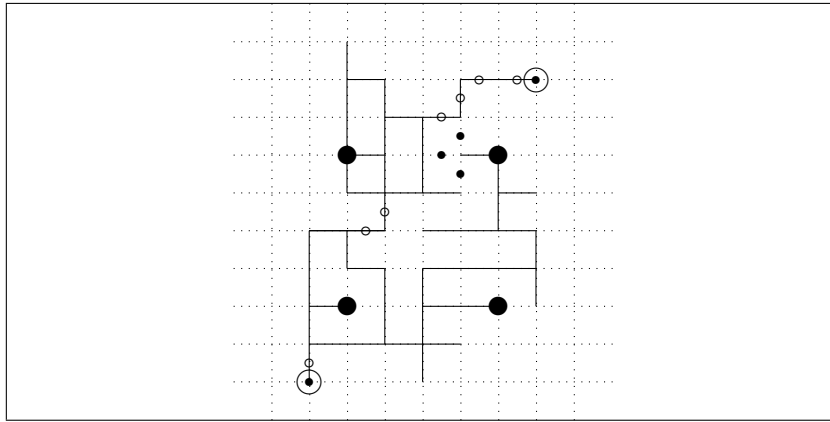


Abbildung 5: Für die Existenz einer Verbindung zwischen den beiden Punkten  $\odot$  sind die mit  $\circ$  markierten Kanten entscheidend. Die  $\bullet$ -Kanten sind entscheidend für eine Verbindung der  $\bullet$ , welche keine Kante doppelt benutzt.

### Beweis

Sei  $A$  ein aufsteigendes Ereignis und  $p$  ein Vektor mit den Kantenwahrscheinlichkeiten.

Wir benutzen die in Definition 4.2 gegebene Konfigurationsbeschreibung  $\eta_p$  auf  $\Gamma$ . Nun wählen wir irgendeine Kante  $f$  und definieren  $p' := ((p'(e) : e \in \mathbb{E}^d)$  durch

$$p'(e) = \begin{cases} p(e) & \text{wenn } e \neq f, \\ p(e) + \delta & \text{wenn } e = f. \end{cases}$$

Dabei ist  $\delta$  so gewählt, dass  $p'(f) \leq 1$ . Dann ist

$$\begin{aligned} P_{p'}(A) - P_p(A) &= P(\eta_{p'} \in A, \eta_p \notin A) \\ &= (p'(f) - p(f)) \cdot P_p(f \text{ ist entscheidend für } A). \end{aligned} \quad (12)$$

Wenn wir durch  $(p'(f) - p(f))$  teilen, folgt wie schon in der Beweisskizze gesehen, dass

$$\frac{P_{p'}(A) - P_p(A)}{(p'(f) - p(f))} = P_p(f \text{ ist entscheidend für } A) \quad (13)$$

$$\text{mit } (p'(f) - p(f)) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial p(f)} P_p(A) = P_p(f \text{ ist entscheidend für } A) \quad (14)$$

Wenn das Ereignis  $A$  nur von endlich vielen Kanten abhängt, dann ist  $P_p(A)$  eine von nur endlich vielen Kantenwahrscheinlichkeiten  $p(f_1), \dots, p(f_m)$  abhängige

Funktion, und wir können die Kettenregel anwenden:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial p(f_i)} P_p(A) \Big|_{p=(p_1, p_2, \dots, p_m)} & (15) \\
 &\stackrel{(14)}{=} \sum_{i=1}^m P_p(f_i \text{ ist entscheidend für } A) \\
 &= E_p(N(A))
 \end{aligned}$$

□

Analogien zwischen dem Beweis und Beweisskizze finden sich zwischen (7)↔(12), (10)↔(13) und (11)↔(15).

#### 4.4 Resultat für unendlich viele Kanten

Hängt  $A$  hingegen von unendlich vielen Kanten ab, so betrachten wir davon nur eine endliche Auswahl  $\mathcal{E}$  und modifizieren die Kantenwahrscheinlichkeiten folgendermaßen:

$$p_{\mathcal{E}} = (p_{\mathcal{E}}(e) : e \in \mathbb{E}^d) \text{ mit } p_{\mathcal{E}}(e) = \begin{cases} p(e) & \text{wenn } e \notin \mathcal{E} \\ p(e) + \delta & \text{wenn } e \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

Dabei ist  $0 \leq p(e) \leq p(e) + \delta \leq 1$ . Innerhalb der Auswahl sind die Kanten mit einer um  $\delta$  größeren Wahrscheinlichkeit durchlässig; ausserhalb ändert sich aber nichts. Somit haben wir, da  $A$  ein aufsteigendes Ereignis ist,

$$P_{p+\delta}(A) \geq P_{p_{\mathcal{E}}}(A).$$

Damit ergibt sich analog zu (13) und (15) mit  $\delta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\delta} (P_{p+\delta}(A) - P_p(A)) &\geq \frac{1}{\delta} (P_{p_{\mathcal{E}}}(A) - P_p(A)) \\
 &\rightarrow \sum_{e \in \mathcal{E}} P_p(e \text{ ist entscheidend für } A).
 \end{aligned}$$

Lassen wir nun  $\mathcal{E} \uparrow \mathbb{E}^d$  gehen, können wir als Korollar eine unetere Schranke festhalten:

**Korollar 4.4 (Untere Schranke für  $\frac{d}{dp} P_p(A)$ )** Sei  $A$  ein aufsteigendes, von beliebig vielen Kanten abhängiges Ereignis in  $\mathfrak{G}$ . Dann ist

$$\frac{d}{dp} P_p(A) \geq E_p(N(A)).$$

Wenn  $A$  also ein von nur endlich vielen Kanten abhängiges und aufsteigendes Ereignis ist, kennen wir die Änderungsgeschwindigkeit seines Eintretens. Damit lässt sich auch im Spezialfall  $p_1 = (p_1, p_1, \dots, p_1)$ , als wichtiges Resultat, eine Schranke für diese Änderungsgeschwindigkeit angeben:

#### 4.5 Schranke der Änderungsgeschwindigkeit von $P_{p_1}(A)$

Da die Eigenschaft, ob eine Kante entscheidend ist, nicht von ihrem eigenen Zustand abhängt (sondern nur dem der anderen), gilt

$$P_p(e \text{ ist entscheidend für } A) = \frac{1}{p} P_p(e \text{ ist durchlässig und entscheidend für } A).$$

Zusammen mit Russos Formel (Satz 4.1) ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \frac{dP_p(A)}{dp} &= \sum_e \frac{1}{p} P_p(e \text{ ist durchlässig und entscheidend für } A) \\ &= \frac{1}{p} \sum_e P_p(A \cap \{e \text{ ist entscheidend für } A\}) \\ &= \frac{1}{p} \sum_e P_p(e \text{ ist entscheidend für } A|A) P_p(A) \\ &= \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) P_p(A) \end{aligned} \quad (16)$$

Nun können wir auf beiden Seiten von (16) durch  $P_p(A)$  teilen und über das Intervall  $[p_1, p_2], 0 \leq p_1 < p_2 \leq 1$  integrieren, so dass

$$\begin{aligned} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dP_p(A)}{dp} \frac{1}{P_p(A)} dp &= \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) dp \\ \Rightarrow \left| \log(P_p(A)) \right|_{p_1}^{p_2} &= \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) dp \\ \Rightarrow P_{p_2}(A) &= P_{p_1}(A) \exp \left( \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} E_p(N(A)|A) dp \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Benutzen wir die triviale Abschätzung  $P_p(e \text{ ist entscheidend für } A|A) \leq 1$  und sei  $m$  die Anzahl der Kanten, von denen  $A$  abhängt, so haben wir mit (17)

$$\begin{aligned} P_{p_2}(A) &\leq \exp \left( \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^m 1 dp \right) P_{p_1}(A) \\ &= \exp \left( m \left| \log p \right|_{p_1}^{p_2} \right) P_{p_1}(A) \\ &= e^{m(\log p_2 - \log p_1)} P_{p_1}(A) \\ &= \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^m P_{p_1}(A) \end{aligned}$$

und können folgendes Korollar festhalten:

**Korollar 4.5 (Schranke der Änderungsgeschwindigkeit von  $P_{p_1}(A)$ )** Wenn  $p_1$  auf  $p_2$  steigt, so ist der Zuwachs von  $P_{p_1}(A)$  durch

$$P_{p_2}(A) \leq \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^m P_{p_1}(A)$$

begrenzt.

## A Anmerkungen

### A.1 Ausweitung der BK-Ungleichung

In den meisten Fällen können wir die Einschränkung auf endlich viele Kanten fallenlassen, in dem wir das Ereignis (bzw. die Ereignisse) zuerst innerhalb einer Box mit Kantenlänge  $n$  betrachten und anschliessend  $n$  gegen unendlich streben lassen. Da aber nicht unbedingt alle denkbaren Ereignisse auf eine endliche Box beschränkt werden können, gilt die BK-Ungleichung in ihrer Allgemeinheit nur auf endlich vielen Kanten.

Für die in der Praxis auftretenden Probleme ist diese Einschränkung jedoch nicht von größerer Bedeutung.

### A.2 $P(|E_{p,\delta}| \geq 2) = o(\delta)$

Wir können davon ausgehen, dass es nur eine essentielle Kante gibt, weil  $P(|E_{p,\delta}| \geq 2) = o(\delta)$ . Denn betrachten wir nur die Wahrscheinlichkeit, dass mehr Kanten überhaupt in Frage kommen, so sehen wir

$$\begin{aligned} P(|E_{p,\delta}| \geq 2) &\leq \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \delta^i (1-\delta)^{m-i} \\ \Rightarrow \frac{P(|E_{p,\delta}| \geq 2)}{\delta} &\leq \delta \sum_{i=2}^m \binom{m}{i} \delta^{i-2} (1-\delta)^{m-i} \\ &\leq \delta \sum_{j=0}^{m-2} c \cdot 1^j \cdot 1^{m-2-j} \quad c := \binom{m}{m/2} \\ &\downarrow 0 \quad \text{wenn } \delta \downarrow 0 \end{aligned}$$

### A.3 Anmerkung zu den verwendeten Zufallsvariablen

Auf den ersten Blick sieht  $\eta$  wie eine Zufallsvariable aus, deren Realisation einer zufälligen Konfiguration aus  $\Gamma$  entspricht. Aber eigentlich ist die "richtige" Zufallsvariable der Vektor  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , dessen Komponenten Werte aus  $[0, 1]$  annehmen und aus denen dann die Komponenten von  $\eta$  folgen. Nachstehendes Logo (Schaubild) sollte dies verdeutlichen:

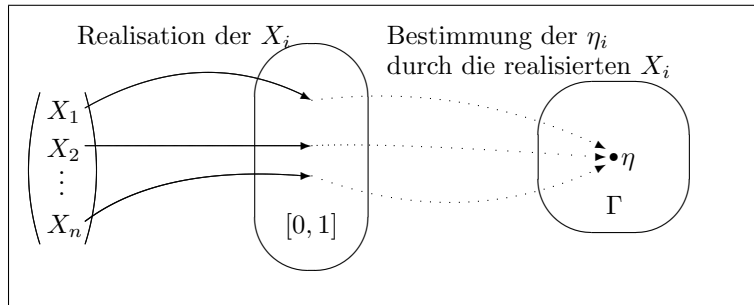


Abbildung 6: Anmerkung zu den verwendeten Zufallsvariablen

### A.4 Ableitungen von $P'_p(A)$

Aus Russos Formel lassen sich auch, durch zu unten beschriebenen analogem Vorgehen, die anderen Ableitungen herleiten:

**Satz A.1**

$$\frac{d^2}{dp^2} P_p(A) = E_p(N_A^{\text{ser}}) - E_p(N_A^{\text{par}}).$$

Dabei ist  $N_A^{\text{ser}}$  die Anzahl der unterschiedlichen, geordneten Paare von Kanten  $e, f$ , so dass  $A$  nur dann eintritt, wenn  $e$  und  $f$  durchlässig sind (sie also quasi seriell benutzt werden müssen). Bei  $N_A^{\text{par}}$  tritt  $A$  nur dann nicht ein, wenn  $e$  und  $f$  undurchlässig sind (und somit diese Kanten sozusagen "parallel" zueinander genutzt werden; also immer nur eine von beiden notwendig ist).

**Beweis**

Seien  $U, V \subseteq \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,  $U \cap V = \emptyset$  und  $\omega \in \Gamma$ . Weiterhin sei  $\omega_V^U$  eine durch folgende Modifizierung abgeleitete Konfiguration:

$$\omega_V^U(e) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } e \in U, \\ 0 & \text{wenn } e \in V, \\ \omega(e) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da im folgenden  $U, V$  nur aus jeweils einer oder zwei Kanten bestehen, lassen wir die Mengenklammern weg. Ist keine Menge angegeben, so ist die leere Menge gemeint.  $\omega_f^e$  beschreibt also eine Konfiguration  $\omega$ , welche an der Kante  $e$  durch- und an  $f$  undurchlässig ist bzw. dahingehend modifiziert wird.

Sei nun  $A$  ein aufsteigendes Ereignis in  $\mathfrak{G}$ . Für seine Indikatorfunktion definieren wir ihren Zuwachs an der Kante  $e$

$$\delta_e 1_A(\omega) := 1_A(\omega^e) - 1_A(\omega_e) = \begin{cases} 1 & e \text{ ist entscheidend für } A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Satz 4.1 folgt daraus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P_p(A) &= \sum_e P_p(e \text{ ist entscheidend für } A) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dp} E_p(1_A) &= \sum_e E_p(\delta_e 1_A) \\ \Rightarrow \frac{d^2}{dp^2} E_p(1_A) &= \sum_{e,f} E_p(\delta_e \delta_f 1_A) \end{aligned}$$

Mit<sup>5</sup>  $\delta_e \delta_e 1_A := 0$  und

$$\delta_e \delta_f 1_A(\omega) = \delta_e (1_A(\omega^f) - 1_A(\omega_f)) = (1_A(\omega^{fe}) - 1_A(\omega_e^f)) - (1_A(\omega_f^e) - 1_A(\omega_{fe})),$$

sowie

$$\begin{aligned} 1_A(\omega_e^f) &= 1_A(\omega^{ef}) 1_A(\omega_e^f), & 1_A(\omega_{ef}) &= 1_A(\omega_{ef}) 1_A(\omega_e^f) 1_A(\omega_f^e), \\ 1_A(\omega_f^e) &= 1_A(\omega^{ef}) 1_A(\omega_f^e), & 0 &= 1_A(\omega_e^f) 1_A(\omega^{ef}) 1_A(\omega_f^e) - 1_A(\omega_e^f) 1_A(\omega_f^e) \end{aligned}$$

folgt, geschickt sortiert, letztendlich

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dp^2} E_p(1_A) &= \sum_{\substack{e,f \\ e \neq f}} E_p \left[ \overbrace{1_A(\omega^{ef}) (1 - 1_A(\omega_e^f)) (1 - 1_A(\omega_f^e))}^{= 1 \Leftrightarrow e, f \text{ seriell}} \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{1_A(\omega_e^f) 1_A(\omega_f^e) (1 - 1_A(\omega_{ef}))}_{= 1 \Leftrightarrow e, f \text{ parallel}} \right] \\ &= E_p(N_A^{\text{ser}}) - E_p(N_A^{\text{par}}) \end{aligned}$$

□

<sup>5</sup>da der Zuwachs bereits in  $\delta_e$  enthalten ist; mehr Zuwachs kann es nicht geben

## B Begriffe

Folgende Begriffe wurden auf die angegebene Weise ins Deutsche übersetzt:

english	→	deutsch
cluster	→	Cluster
open	→	durchlässig
closed	→	undurchlässig
increasing event	→	aufsteigendes Ereignis
essential, essential edge	→	essentiell, essentielle Kante
pivotal, pivotal edge	→	entscheidend, entscheidende Kante
rate of change	→	Änderungsgeschwindigkeit

## Abbildungsverzeichnis

1	Die Menge $C_1$ . . . . .	4
2	Die Menge $C'_2$ . . . . .	4
3	Die Menge $C''_2$ . . . . .	4
4	Die Abbildung $\varphi$ . . . . .	4
	Injektivität von $\varphi$ . . . . .	5
5	Beispiele für entscheidende Punkte . . . . .	7
6	Anmerkung zu den verwendeten Zufallsvariablen . . . . .	10

## Literatur

- [1] Grimmett. *Percolation*, 2nd edition, 1999
- [2] T.L. Snyder, J.M. Steele. *Probabilistic Networks and Network Algorithms*, 2000