Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

7. Juli 2001

Aufgabe 1
O.B.d.A. sei $z = x + 1$, denn eine Irrfahrt ist eine Markovkette und hat somit kein Gedächtnis (kann also in jedem Punkt neu beginnen):

$$P_x\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right] = P_x\left[\max_{0\le k\le R_{z-1}} Y_k < y\right] P_{z-1}\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right]$$

Sie ist aber auch Verschiebungsinvariant und wir können die Aufgabe als klassisches Ruinproblem betrachten: wie wahrscheinlich ist es, beim starten vom Wert y, den Wert $y+1$ zu erreichen, ohne auf die 0 zu treffen. Sei $h(x)$ diese gesuchte Verteilung:

Wir haben

$$h(0) = 0, \qquad h(y+1) = 1, \qquad h(x) = \frac{h(x-1)}{2} + \frac{h(x+1)}{2} \text{ für } 0 < x < y+1.$$

Also $h(1) = 0 + \frac{h(2)}{2} \Leftrightarrow h(2) = 2h(1)$. So können wir auch alle weiteren berechnen: $h(3) = 2\frac{h(2)}{2} - 2\frac{h(1)}{2} = 3h(1)$. Durch vollst. Induktion zeigt man formal, dass wirklich $h(x) = xh(1)$ ist. Da $h(y+1) = (y+1)h(1) = 1 \Leftrightarrow h(1) = \frac{1}{y+1}$ ist somit $h(x) = \frac{x}{y+1}$.

Für $z = x + 1$ haben wir also $P_x(\dots) = \frac{y}{y+1}$.

Aufgabe 2
a)
Sie ist rekurrent $\Leftrightarrow P(V(0) < \infty) > 0 \Leftrightarrow a_0a_1a_2\cdots = \lim_{i\to\infty} b_i > 0$.

b)
Sie ist positiv rekurrent $\Leftrightarrow E(R) < \infty$:

$$E(R) = \sum_{i=0}^{\infty} iP(R_0 = i) = \sum_{i=0}^{\infty}(P(R_0 \ge i) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i.$$

Sei $\mu(x)$ die gesuchte Gleichgewichtsverteilung. Als Bedingungen haben wir dann:

$$\mu(i) = \mu(i-1)a_i.$$

Daraus folgt $\mu(i) = \mu(0)b_i$. Da die Summe der b_i endlich ist und $\sum\mu(i) = 1$, haben wir

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty}\mu(0)b_i \Leftrightarrow \mu(0) = \frac{1}{\sum b_i} \Leftrightarrow \mu(i) = \frac{b_i}{\sum b_i}.$$

Aufgabe 3 Wir haben einen Baum, in dem wir uns mit W'keit 2/3 nach unten bewegen (sonst nach oben). Wir fragen uns also, ob es möglich ist, dass eine solche Irrfahrt nichtmehr zurückkommt.

Intuitiv ist die Sache klar, denn im Erwartungswert geht es 1/3 pro Schritt nach unten.

Um dies formal zu zeigen, sehen wir uns die W'keit $h_d(x)$, vom Punkt x aus die Tiefe d zu erreichen, ohne zur Tiefe 0 zu gelangen, an. Wie in Aufgabe 1 errechnen wir eine Verteilung $h_d(x)$ mit

$$h_d(x) = \frac{h_d(x-1)}{3} + \frac{2h_d(x+1)}{3}, \qquad h_d(0) = 0, \qquad h_d(d) = 1.$$

Mit vollst. Induktion zeigt man, dass $h_d(x) = \frac{2^x-1}{2^{x-1}} \cdot \frac{2^{d-1}}{2^d-1}$. Lassen wir nun d gegen unendlich gehen, haben wir

$$\lim_{d\to\infty} = \frac{2^x-1}{2^{x-1}}\frac{1}{2}.$$

Sie ist also positiv und somit ist jeder Punkt[1] bzw. die Irrfahrt transient.

Aufgabe 4
a)

$$E_x(V(y)) = P_x(R_y < \infty)E_y(V(y) \leq E_y(V(y))$$

b)
Da $\mathbb{E}_x(V(y)) = \mathbb{E}\left(\sum_n I_{\{X_n=y\}}\right) = \sum_n \mathbb{E}\left(I_{\{X_n=y\}}\right) = \sum_n P^n(x,y)$, oder weil $G(x,y) = P_x(V(y) \geq 1)$ haben wir:

$$G(x,y) = E_x(V(y)) \qquad G(y,y) = E_y(V(y))$$

Aufgabe 5
a)
mit $a_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{n}\sum_n a_i\right) \to 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{|y|>\varepsilon n} G_n(0,y) = \quad & \lim \frac{1}{n} \sum_{|y|>\varepsilon n} \sum_{k=0}^{n} P^k(0,y) \\ = \quad \lim \tfrac{1}{n}\textstyle\sum\limits_{k=0}^{n} \sum_{|y|>\varepsilon n} P^k(0,y) = \quad & \lim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \underbrace{P_0(|X_k| > \varepsilon n)}_{GGZ\to 0} = 0 \end{aligned}$$

b)
Wegen $G(0,0) \geq G(y,0)$ (siehe 4.b) ist $G(0,y) \leq G(0,0)$, denn wir befinden uns in einer symmetrischen Irrfahrt und wir haben

$$\begin{aligned} & 1 = \lim \tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{|y|<\varepsilon n} G_n(0,y) \leq \lim \tfrac{1}{n}\sum_{|y|<\varepsilon n} G_n(0,0) = \liminf \tfrac{1}{n}\varepsilon n G_n(0,0) \\ \Rightarrow \quad & 1 \leq \liminf \varepsilon G_n(0,0) \Leftrightarrow \tfrac{1}{\varepsilon} \leq \liminf G_n(0,0) \end{aligned}$$

[1] es reicht auch aus, dass $x = 1$ transient ist