Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“ 6-10

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

7. Juli 2001

Aufgabe 6 Unabhängig davon ob P periodisch oder aperiodisch ist, gibt es für jedes y eine Folge $(n_j)_j$ aus $\mathbb{N}$, so dass sich folgender Durchschnitt im Grenzwert konvergiert (jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge, Teilfolgen von konvergentenFolgen konvergieren auch):

$$\pi(y) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} P^j(x_0, y).$$

Daraus ergibt sich dann:

$$\begin{aligned}
\sum_x \pi(x)P(x,y) &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} \sum_x P^j(x_0,x)P(x,y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} P^j(x_0,y) \\
&= \pi(y) - \lim \frac{1}{n_k} P^0(x_0,y) + \lim \frac{1}{k} P^{n_k}(x_0,y) \\
&\to \pi(y)
\end{aligned}$$

Da die Summe der $\pi(y)$ Eins ergibt, ist es eine Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 7 Wie schon in den notes erwähnt, ist die erwartete Anzahl der Besuche von x bei Start in z bis zur Rückkehr in z genau $m_z(x) = E_z(\sum_{n=1}^{R_z} I_{\{X_n=x\}})$, ein invariantes Maß (kein W'keitsmaß!); also $m_z P = m_z$. Da wir eine einfache, symmetrische Irrfahrt betrachten, besteht diese Summe nur aus zwei Summanden:

$$m_z(x) = \frac{1}{2} m_z(x-1) + \frac{1}{2} m_z(x+1)$$

Da $m_z(x+1) - m_z(x) = m_z(x) - m_z(x-1)$ ist m_z linear und von der Form $a + b \cdot x$. Da $m_z(x) > 0$ für alle $x, z \in \mathbb{Z}$ muss $a > 0$ und $b = 0$ sein. Zum Schluss ist noch $m_z(z) = 1$ und somit ist die erwartete Anzahl der Besuche in x immer genau 1, egal von wo man startet und x gewählt hat.

Aufgabe 8 a)

Interpretieren wir + als 1 und - als 0, so beschreiben die $\eta^{(i)}$ eine Irrfahrt auf einem N-dimensionalen Würfel. Als Übergangswahrscheinlichkeit haben wir

$$P(\eta, \eta') = \begin{cases} \frac{1}{N} & d(\eta, \eta') = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Abbildung f definiert sich dann durch $f : \Omega \to [0, N]$ mit $\eta \mapsto \sum \eta^{(i)}$.
Jedes η kann durch N verschiedene andere η entstehen; diese haben alle das Gewicht $\frac{1}{2^N}$, denn bei der Irrfahrt auf dem Würfel sind alle Punkte gleichberechtigt. Schliesslich kann jedes η auf $\binom{N}{x}$ verschiedene Arten entstehen (x Einser aus N Komponenten auswählen). Somit haben wir als gesuchte Gleichgewichtsverteilung

$$\pi(x) = \frac{1}{2^N}\binom{x}{N}.$$

Man kann noch nachprüfen, dass diese die notwendigen Bedingungen erfüllt:

$$\pi(0) = \frac{\pi(1)}{N}, \quad \pi(N) = \frac{\pi(N-1)}{N}, \quad \pi(x) = \pi(x-1)\frac{N-(x-1)}{N} + \pi(x+1)\frac{x+1}{N}$$

b)

Betrachten wir die Menge mit gerade Anzahl von Einser und die mit ungerade Anzahl. Bei einer geraden Anzahl von Schritten bleibt man in dieser Menge; bei ungeraden Schritten wechselt man die Menge. Also ist $P^n(z, \cdot)$ periodisch und konvergiert nicht. Dagegen konvergiert $P^{2n}(z, \cdot)$ schon, weil man dann in einer Menge bleibt. Also $P^{2n}(z, z) > 0$ für alle ungeraden bzw. geraden z. Mit $n \to \infty$ konvergiert der Ausdruck gegen die alte Gleichgewichtsverteilung, eingeschränkt auf die geraden oder ungeraden Summen von Einser mit den doppelten Gewichten. Also mit i gerade oder ungerade: $\pi(i) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{i}$.

c)

$$\pi Q = \pi \frac{1}{2}(P + I) = \frac{\pi P}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Also konvergiert $Q^n(z, \cdot)$ gegen die alte Gleichgewichtsverteilung π.

Aufgabe 9 a) und b) sind Stoppzeiten, denn sie hängen nur von endlich vielen Zuständen ab $(X_0, \dots, X_{R_z})$ bzw. $(X_0, \dots, X_{R_z}, X_{R_z+1}, \dots, X_{R_z+R_z})$. Bei c) weiss man erst dann ob man nie wieder zu z zurückkehrt, wenn man unendlich viele X_i kennt; also die Zukunft kennt. Dabei muss man entartete Fälle ausschliessen (z.B. Fahrt auf $\mathbb{N}$ mit $P(n, n+1) = 1$)

Aufgabe 10 a)

Die X_n sind abhängig, denn $P(X_n|X_{n-1}) = \frac{1}{2} \neq P(X_n) = \frac{1}{2^l}$. Aber es ist eine Markovkette, denn $P((((X_0, X_1), X_2), \dots), X_n) = P(X_{n-1}, X_n) = \frac{1}{2}$.

b)

Theorem 1.1 sagt uns, dass $\pi(HTHT) = \frac{1}{E(R_{HTHT})} \Leftrightarrow E(R_{HTHT}) = \frac{1}{p^2q^2}$. Denn wir befinden uns in einer stationären Verteilung und betrachten die Zeiten zwischen dem erscheinen zweier Ereignisse. Bei einer patternlänge von 4 kann man so NUR die Verteilung zeischen 2 solchen Ereignissen so verwenden; so kann man nicht die Wartezeit von der 0 bis HTHT berechnen.

c)

Wir betrachten immer Pattern der Länge 4. Beim Start in $HTHT$ ist nach dem ersten Wurf das erste H bereits irrelevant, da es nichtmehr in den letzten 4 Stellen liegt. Da HTHT mit H anfangen muss, muss man mindestens noch einmal werfen, um ein Pattern HTHT zu erhalten. Das erste Paar HT spielt also keine Rolle.

d)

Selbe Argumentation wie bei b).

e)

Wegen der Gedächtnislosigkeit kann man die Erwartungswerte addieren:

$$\begin{aligned}
E(R_{HTHT}) &= E_0((X_0, \ldots, X_n) = (0, \ldots, HTHT)) \\
&= E_0((\ldots) = (0, \ldots, HT, \ldots, HTHT)) \\
&= E_0((\ldots) = (0, \ldots, HT)) + E_{HT}((\ldots) = (HT, \ldots, HTHT))
\end{aligned}$$