Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

7. Juli 2001

Aufgabe 11 Wenn A durch $(X_1, \dots, X_T)$ bestimmt wird, dann existiert auch eine Menge C_n, so dass $A \cap \{T = n\} = \{(X_0, \dots, X_n) \in C_n\}$.

$$
\begin{aligned}
P_\mu(\dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} P_\mu(\{(X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\} \cap A \cap \{T = n\} \cap \{X_n = z\}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{(y_0,\dots,y_n)\in C_n \\ y_n = z}} P_\mu((X_n, X_{n+1}, \dots) \in B, (x_0, \dots, x_n) = (y_0, \dots, y_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{(y_0,\dots,y_n)\in C_n \\ y_n = z}} P_z((X_0, X_1, \dots) \in B) P_\mu((X_0, \dots, X_n) = (y_0, \dots, y_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z(\{(X_0, X_{0+1}, \dots) \in B\}) P_\mu(A \cap \{T = n\} \cap \{X_n = z\}) \\
&= P_z(X \in B) P_\mu(A \cap \{T < \infty\} \cap \{X_T = z\})
\end{aligned}
$$

Als Fazit können wir die starke Markoveigenschaft festhalten. Im diskreten Raum und endlicher Zeit gilt die schwache Markoveigenschaft auch für Stoppzeiten.
A ist durch $(X_0, \dots, X_T)$ bestimmt bedeutet dabei, dass bis zur (endlichen) Stoppzeit festgestellt werden kann, ob das Ereignis A eingetreten ist, oder nicht.

Aufgabe 12 a)

Wir sehen uns $P(F(Y) = y)$ genauer an. Wir untersuchen diese Wahrscheinlichkeit anhand ihrer möglicher Urbilder. Wenn $F(Y) = y$ ist, dann kann Y alle Werte aus S_0 angenommen haben und dann nach y abgebildet worden sein:

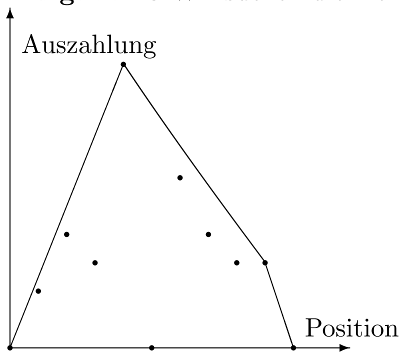
$$
\begin{aligned}
P(F(Y) = y) &= \sum_x P(F(Y) = y, Y = x) \\
&= \sum_x P(x, y) \cdot \pi(x) \\
&= \pi(y)
\end{aligned}
$$

Y besitzt eine Gleichgewichtsverteilung und F ist von Y unabhängig (daher ist die Multiplikation OK). Ausserdem ist $P(x, y) = P(F(x) = y), P(Y = x) = \pi(x)$.

b)

Benutze den Hinweis. Da $R = \{Z\}$ fast sicher, und Y die Verteilung π hat, bleibt diese nach jeder Abbildung erhalten (siehe a)).

Aufgabe 13 Wir suchen die kleinste konkave Majorante von f:



Die Erwarteten Auszahlungen können nun einfach an der Funktion abgelesen werden. Optimal stoppt man an den Zuständen 4 (Auszahlung 10) und 9 (Auszahlung 3). Ausgerechnet sind die erwarteten Auszahlungen: $v(0) = 0, \quad v(1) = 2.5 \quad v(2) = 5, \quad v(3) = 7.5, \quad v(4) = 10, \quad v(5) = 8.6, \quad v(6) = 7.2, \quad v(7) = 5.8, \quad v(8) = 4.4, \quad v(9) = 3, \quad v(10) = 0.$

Aufgabe 14 Im Prinzip folgen wir der Funktionsbildung von v, wie in den notes beschrieben.
Das bedeutet, dass die Funktion v den erwarteten Betrag beim nochmaligen Drehen beschreibt. Dies tun wir solange, bis die erwartete Auszahlung die aktuelle Auszahlung unterschreitet (wir spielen solange $v > f$ und hören bei $v = f$ auf.
$f(x) = x$. Wird nicht Bankrott gedreht, bekommen wir im Schnitt 600 auf unser Konto. Mit W'keit 11/12 erhöhen wir unser Konto. Unsere Funktion v ist also $v(x) = \frac{11}{12}(x + 600) + \frac{1}{12} \cdot 0$.
Wir stoppen, wenn $v(x) = f(x) = x$. Also

$$\frac{11x}{12} + 550 = x \Leftrightarrow 550 = x - \frac{11}{12}x \Leftrightarrow x = 6600.$$

Wir spielen also solange, bis wir mindestens 6600 erreicht haben.

Zus ausrechnen bemühen wir einen Computer. zu lösen ist das Gleichungssystem $v(0) = \frac{1}{12}(v(100) + v(200) + \cdots + v(1100))$, usw. bis zu $v(6500) = \frac{1}{12}(v(6600) + \ldots v(7600))$. Dabei ist für $x \geq 6600 : v(x) = f(x) = x$.
Wir erhalten den Erwarteten Gewinn von ≈ 2565.1.

Aufgabe 15 bei (i) wird die erwartete Auszahlung mit laufender Zeit negativ modifiziert. Z.B. bei Spielen, die in möglichst kurzer Zeit absolviert werden sollen. Deshalb wird die vergangene Zeit negativ auf den Gewinn angerechnet; oder umgekehrt: wer sich traut und lange durchhält wird mit niedrigeren Abschlägen belohnt. Ein konstantes g könnte auch eine Eintrittsgebühr symbolisieren, die unabhängig vom Spiel entrichtet wird. Ein praktisches Beispiel könnten pauschale Abgassteuer sein, die bei Alterung des Geräts steigen (Auszahlung wäre dann der Gewinn, den das Gerät abwirft, der bei 0 optimal ist).

bei (ii) wird die erwartete Auszahlung einfach in jedem Schritt erneut nach unten skaliert. Z.B. bei diskontierten Einschätzungen über die Zukunft seines Kapitalertrages. Angenommen wird, dass es in Erwartung steigen wird, das zukünftige Kapital aber subjektiv weniger wert ist als das aktuelle (werde ich zu den Zeitpunkt noch leben, etc.).

(iii) ist eine kombination der beiden anderen. Z.B. ein Laster, der mit fortschreitendem Einsatz mehr laufende Kosten verursacht (steigendes g) und dessen zukünftiger Gewinn immer geringer eingeschätzt wird. Die Frage ist nun, wielange man ihn nutzen sollte.