Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

7. Juli 2001

Aufgabe 16 a)
Es ist klar, dass $\forall x, y : 0 \leq Q(x,y) \leq 1$, denn jede Zeilensumme ist Eins:

$$\sum_y Q(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sum_y \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y,x) = 1 \Leftrightarrow \sum_y \pi(y)P(y,x) = \pi(x).$$

b)

$$\begin{aligned}
P(X_0 = x | X_1 = y) &= \frac{P(X_0 = y, X_1 = x)}{P(X_1 = x)} \\
&= \frac{\pi(y)P(y,x)}{\pi(x)} = Q(x,y) \\
P(X_0 = z | X_1 = y, X_2 = z) &= \frac{PX_0 = z, X_1 = y, X_2 = z)}{P(X_1 = y, X_2 = z)} \\
&= \frac{\pi(z)P(z,y)P(y,z)}{\pi(y)P(y,z)} = Q(y,z)
\end{aligned}$$

Man kann die erste Gleichung auch gleich intuitiv beantworten: die Wahrscheinlichkeit im vorigen Zug in y gewesen zu sein, wenn man sich aktuell in y befindet, ist die Wahrscheinlichkeit in y zu sein und dann nach x zu kommen, normiert auf den Fluss nach x (also überhaupt nach x zu kommen),
c)

$$\begin{aligned}
P((...) = (...)) &= \pi(x_0)P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},x_n) \\
&= \left(\pi(x_0)P(x_0,x_1)\frac{1}{\pi(x_1)}\right)\left(\pi(x_1)P(x_1,x_2)\frac{1}{\pi(x_2)}\right)\cdots \\
&\quad \cdots\left(\pi(x_{n-1})P(x_{n-1},x_n)\frac{1}{\pi(x_n)}\right)\pi(x_n) \\
&= Q(x_1,x_0)Q(x_2,x_1)\cdots Q(x_n,x_{n-1})\pi(x_n)
\end{aligned}$$

Aufgabe 17
a)

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{\rho_{x+1}}{P(R>x)} & \text{wenn } y = 0 \\ \frac{P(R>y)}{P(R>x)} = P(R > y | R > x) & \text{wenn } y = x+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b)

$$h(x+1) = P(R = x+1 | R > x) = \frac{P(R = x+1)}{P(R > x)} = Q(x, 0).$$

Aufgabe 18
a) $v(k) = \frac{1}{ER} P(R > k)$
1) $v(x) = \frac{10-x}{10} \cdot \frac{1}{5} = 0.2 - x/50$ für $0 \leq x \leq 10$
2) $v(x) = 1/10$ für $0 < x < 10$. sonst 0.
3) $P(R > k) = 1 - 2 \int_1^k \frac{1}{r^3} = 1 - | - r^{-2}|_1^k = 1 + \frac{1}{k^2} - 1$ für $1 \leq x$
Da die zweite nicht "non-lattice" ist, gibt es keine Konvergenz. Bei den anderen schon.

b)

i)

$$\frac{1}{10} \int_0^{10} r dr = 5, \quad 10, \quad \int_1^{\infty} 2 \frac{r}{r^3} dr = 2.$$

ii)

$$\int_0^{10} 0.2x - x^2/50 dx = \frac{10}{3}, \quad \int_0^{10} \frac{x}{10} dx = 5, \quad \int_1^{\infty} \frac{k}{2k^2} dk = \frac{1}{2} | \log k|_1^{\infty} = \infty$$

Oder auch nachvollziehbar wegen Erwartung im Gleichgewicht = $\mathbb{E}(U\hat{R})$. Für $\hat{R}$ siehe *iii*).
iii)$\hat{\rho}(x) = \frac{x}{ER} \rho(x)$

$$\frac{1}{10} \int_0^{10} \frac{r^2}{5} dr = \frac{20}{3}, \quad \frac{10 \cdot 10}{10} = 10, \quad \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{r^2}{r^3} dr = \infty$$

Aufgabe 19
a)

Für $k = 1$ ist es klar. Schritt von k nach $k+1$. Sei X $exp(1)$ und Y $Gamma(k)$ verteilt:

$$\begin{aligned} P(X + Y \in dz) &= \int_0^z \frac{x^{k-1} e^{-x}}{\Gamma(k)} e^{-(z-x)} dx \\ &= \frac{e^{-z}}{\Gamma(k)} \int_0^z x^{k-1} dx \\ &= \frac{e^{-z} z^k}{\Gamma(k+1)} = g_{k+1}(z) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z^l &= \int_0^\infty x^l \frac{x^{k-1}e^{-x}}{\Gamma(k)} dx = \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(k+l)\Gamma(k)} \int_0^\infty x^l x^{k-1} e^{-x} \\
&= \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(k)} \int_0^\infty x \frac{x^{k+l-2}e^{-x}}{\Gamma(k+l)} dx \\
&= \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(k)}
\end{aligned}$$

c)

Der Erwartungswert einer $exp(1)$ verteilten ZV ist 1. Er ist additiv, also ist der Erwartungswert einer $Gamma(t)$ verteilten ZV genau t.

$$\hat{g}_k(x) = \frac{x}{\mathbb{E}X} g_k(x) = \frac{1}{k \cdot (k-1)!} x^k e^{-x} = g_{k+1}(x).$$

d)

Zum einen erhält man die size-biased $Gamma(k)$Verteilung, in dem am einfach eine $exp(1)$ verteilte ZV addiert. Hier gewünscht ist die Erkenntnis, dass man sie dadurch erreicht, in dem man einen Summand der k $exp(1)$-verteilten ZV "size-biased“ anpasst.

Aufgabe 20

Es ist $\mathbb{E}exp(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ und sei $\mathbb{E}G = \mu$. Potentielle Kunden kommen mit Poissonrate α an. Auf der Zeitachse sind das $exp(\alpha)$ verteilte ZVs.

a)

Wir machen uns die Gedächstnislosigkeit der Exponentialverteilung zu nutze. Die Auslastungszeit des Schalter ist G verteilt. Endet diese, ist die Wartezeit auf den nächsten Kunden ebenfalls $\exp(\alpha)$ verteilt. Die Wartezeit auf einen Kunden beträgt im Erwartungswert also $\mathbb{E}(G + exp(\alpha)) = \mu + \frac{1}{\alpha}$. Die gesuchte Rate ist dann der Kehrwert: $\frac{1}{\mu + \frac{1}{\alpha}}$.

b)

Wir wollen wissen, wieviele Punkte in Erwartung zwischen 0 und G fallen: $\mathbb{E}(Z)$. Die gesuchte Rate ist dann $\frac{1}{1+\mathbb{E}Z}$. Die Anzahl der Punkte ist $Pois_{\alpha \cdot y}$ verteilt, wenn $G = y$.

$$\mathbb{E}(Z|G = y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha y}(\alpha y)^k}{k!} = \alpha y.$$

Also ist $\mathbb{E}(Z) = \alpha\mu$.

c)

Die erwartete Wartezeit, bis der nächste Kunde bedient wird, war nach a) $\mu + \frac{1}{\alpha}$. Davon war die besetztzeit μ. Der Anteil der besetzten Zeit ist also $\frac{\mu}{\mu + 1/\alpha}$.