# Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
*thomas@7t7.de*

7. Juli 2001

Im folgenden ist es immer gut zu wissen, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ist.

**Aufgabe 21**
a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(-\beta Y) &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty e^{-\beta y} y^{k-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty e^{-(\beta+1)y} y^{k-1} dy \\
&\quad \text{substituiere } (1+\beta)y \text{ durch } z \\
&= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty e^{-z} \left(\frac{z}{1+\beta}\right)^{k-1} \frac{dz}{1+\beta} \\
&= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty e^{-z} z^{k-1} dz \\
&= (1+\beta)^{-k}
\end{aligned}
$$

b)
Da $Y_1, Y_2$ unabhängig sind, könne wir die Erwartungswerte (Laplace-Transformation) multiplizieren.

$\mathbb{E}\exp(\beta(Y_1+Y_2)) = \mathbb{E}\exp(\beta Y_1)\cdot\mathbb{E}\exp(\beta Y_2) = (1+\beta)^{-k_1}(1+\beta)^{-k_2} = (1+\beta)^{-(k_1+k_2)}$.

$Y_1 + Y_2$ ist also Gamma$(k_1 + k_2)$ verteilt.

**Aufgabe 22**
a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(-\beta N) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta n} e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(e^{-\beta}\alpha\right)^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha}\exp(\alpha e^{-\beta}) \\
&= \exp(\alpha(e^{-\beta} - 1))
\end{aligned}
$$

b)

Entweder man benutzt die Linearität des Erwartungswertes und den Differentialquotienten. Dann ist nämlich mit $w(\beta) := \mathbb{E}(\exp(-\beta N)$ die Ableitung an der Stelle $\beta = 0 : w'(0) = -\mathbb{E}(N)$.

Somit ist $\frac{d^k}{d\beta^k} w(0) = (-1)^k \mathbb{E}(N^k)$. Rechnet man diese aus, bekommt man $\mathbb{E}(N) = \alpha, \mathbb{E}(N^2) = \alpha^2 + \alpha$ und somit $\mathrm{Var}(N) = (\alpha^2 + \alpha) - \alpha^2 = \alpha$.

Oder man macht sich zunutze, dass die $k-$te Ableitung an der Stelle 0 der Kumulantenerzeugenden $\log \mathbb{E} \exp(\beta X) =: v(\beta)$ das $k-$te Moment ist:

$$v'(\beta) = v''(\beta) = \alpha e^{\beta} \Rightarrow v'(0) = v''(0) = \alpha.$$

**Aufgabe 23**

a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \exp(-\beta S_n) &= \mathbb{E} \prod_{i=0}^{n} \exp(-\beta X_i) \\
&= \prod_{n=0}^{n} \mathbb{E} \exp(-\beta X n) \\
&= (pe^{-\beta} + 1 - p)^n
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \exp(-\beta S_N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!} (pe^{-\beta} + 1 - p)^n \\
&= e^{-\alpha} \frac{(\alpha p (e^{-\beta} - 1) + \alpha)^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha} e^{\alpha} \exp((e^{-\beta} - 1)\alpha p) \\
&= \exp(-(1 - e^{-\beta})\alpha p)
\end{aligned}$$

c)

$S_N$ ist Poisson($\alpha p$)-verteilt. Siehe Aufgabe 22a).

d)

Wir geben jedem Punkt ein Label 0 oder 1. Das Label 1 wird mit Ws $p$ vergeben und unabhängig von allem anderen. Dann sind diese Punkte Poisson($\alpha p$) verteilt. Heuristisch kann man so argumentieren, dass die Anzahl der Erfolge von vielen Ereignissen, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten sich auf $\alpha$ aufsummieren asymptotisch Poisson($\alpha$) verteilt. Tritt jedes dieser Ereignisse nur mit W'keit $p$ ein, dann summieren sich die einzelnen W'keiten nur auf $p\alpha$ auf.

Oder man rechnet nach: das Intensitätsmaß nach dem thinning ist

$$m_p(B) := \int_B p(y) m(dy) = p \int_B m(dy) = pm(B) = p\alpha\lambda(B).$$

Auf $\mathbb{R}$ ist $\lambda(B)$ die Intervalllänge von $B$.

**Aufgabe 24**

Das jittern ist äquivalent zu einem zufälligen markieren. Wir markieren jeden Punkt $n$ des Poissonprozesses mit dem Label $Y_n$. Nach Proposition 3.4 (Notes) erhalten wir einen PPP auf dem Produktraum $(\mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2)$. Projezieren wir diesen auf $\mathbb{R}_2$ so erhalten wir den PPP auf $\mathbb{R}$ durch die $Y_n$.

Jeder Punkt des PPP wird unabhängig von allen anderen verschoben (nach einer vorgegebenen Verteilung). Vor dieser Verschiebung befanden sich in 2 beliebigen Intervalle gleicher Länge in erwartung gleichviele Punkte (sie haben gleiches Intensitätsmaß). Also ist dies nach der Verschiebund in Erwartung immernoch der Fall. Also ist der neue PPP auch homogen.
Wir können das Intensitätsmaß auch ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
(m \otimes P)(B) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} m(dx)\pi(dj) 1_B(x+j) \\
&= \alpha \int \left( \int \lambda(dx) 1_B(x+j) \right) \pi(dj) \\
&= \alpha \int \lambda(B)\pi(dj) \\
&= \alpha\lambda(B)\pi(\mathbb{R})
\end{aligned}
$$

Die in $B$ betrachteten Punkte sind immernoch unabhängig und Poissonverteilt, nun zum Parameter $\alpha\lambda(BB)$.

**Aufgabe 25**
a)

Die erwartete Kundenzahl, wenn $G = y$ ist $\alpha y$. $G$ ist in Erwartung $\mu$. Also kommen im Schnitt $\alpha\mu$ Kunden an, wenn einer bedient wird (siehe Aufgabe 20).

b)
$X_i$ ist die Anzahl der Punkte, die in das Intervall $[0, G_i)$ fallen minus Eins. (also alle, die ankommen, während einer bedient wird, weniger einem, der fertig bedient wurde). Wir beschränken uns auf die Frage, ob die Schlange immer irgendwann auf 0 zusammenschrumpft (dann hören wir auf oder starten den Prozess von neuem). Wie in a) gesehen, ist $\mathbb{E}(X_i + 1) = \alpha\mu$. Wenn $\alpha = \frac{1}{\mu}$, dann bleibt die Warteschlange nach jeder Bedienung im Mittel konstant ($\mathbb{E}X_i = 0$).

Nach Aufgabe 5) ist eine solche Markovkette (die Warteschlange) rekurrent.