Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

14. Juni 2002

Aufgabe 30
a),b)
Wir nehmen gleich ganz allgemein $q_x^{(n)} = \tau(x)$ und $J^{(n)}(x, x+\frac{1}{\sqrt{n}}) = h(x)$, $J^{(n)}(x, x-\frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 - h(x)$,
Mit der Taylorentwicklung $f(x+h) = f(x) + h'(x) + h^2/2f''(x+\Theta h)$ haben wir dann

$$\begin{aligned}
\lim_n (Q^{(n)}f)(x_n) &= \lim_n \tau(x_n)(1-h(x_n))f(x_n - \frac{1}{\sqrt{n}}) - \tau(x_n)f(x_n) \\
&\quad + \tau(x_n)h(x_n)f(x_n + \frac{1}{\sqrt{n}}) \\
&= \lim_n \tau(x_n)(1-h(x_n))[f(x_n) - \frac{1}{\sqrt{n}}f'(x_n) + \frac{1}{2n}f''(x_n + \frac{\Theta_1}{\sqrt{n}})] \\
&\quad - \tau(x_n)f(x_n) + \tau(x_n)h(x_n)[f(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}f'(x_n) + \frac{1}{2n}f''(x_n + \frac{\Theta_2}{\sqrt{n}})] \\
&= \lim f'(x_n)\frac{\tau(x_n)}{\sqrt{n}}(2h(x_n)-1) + f''(x_n + \frac{\Theta_2}{\sqrt{n}})[\frac{\tau(x_n)h(x_n)}{2n}] \\
&\quad + f''(x_n + \frac{\Theta_1}{\sqrt{n}})[\frac{\tau(x_n)(1-h(x_n))}{2n}] \\
\text{informell} &\rightarrow f'(x)\left[\frac{\tau(x)(2h(x)-1)}{\sqrt{n}}\right] + \frac{f''(x)}{2}\left[\frac{\tau(x)}{n}\right]
\end{aligned}$$

Da wir uns auf nur auf Sprüngen zu Nacharn beschränkt haben, lässt sich b) nicht für beliebige b und σ erfüllen, wenn J^n für jedes n wirklich eine stochastische Matrix sein soll. Ansonsten muss gelten:

$$b(x) = \frac{\tau(x)}{\sqrt{n}}(2h(x)-1) \qquad \sigma^2(x) = \frac{\tau(x)}{n}$$

bzw.:

$$\tau(x) := \sigma^2(x) \cdot n \text{ und } h(x) := \frac{1}{2} + \frac{b(x)}{2\sqrt{n}\sigma^2(x)}.$$

und somit ist b wegen $h(x) \in [0,1] \forall x$ nicht frei wählbar, es sei denn wir betrachten nur $\lim_n J^n$.
Für Aufgabenteil a) setze $b(x) = 0, \sigma(x) = 1$.

Lassen wir beliebig grosse Sprünge zu, so kann man die Sprungmatrix so modifizieren, dass die Gleichung für beliebige b, σ erfüllt ist ($q_x^{(n)}$ brauch man dazu garnicht ändern).

Aufgabe 31
Wenn die Population k gross ist, dann ist die Wartezeit auf eine Geburt $Exp(k)$ verteilt. Auf einen Todesfall genauso. Also ist die Wkeit, wenn eine Populationsänderung eintritt, dass es eine Geburt (Todesfall) ist 0.5.

Für die a) siehe einfach Aufgabe 30 und nehme dort k statt x und $h(k) = 0.5$ und $\tau(k) = kn$. Wir ziehen wieder den Raum mit $\sqrt{n}$ zusammen und beschleunigen die Zeit mit n.

Bei der b) skalieren wir den Raum wieder mit $\sqrt{n}$ und die Zeit diesmal etwas anders:

$$Q^n(x, x + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) := nx/2 + \frac{\sqrt{n}\mu c}{\sigma}, \qquad Q^n(x, x - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) := nx/2 + \frac{\sqrt{n}\mu x}{\sigma}$$

Wir beschleunigen also die Immigranten und teilweise den Tod etwas langsamer.

Damit wird nun das richtige herauskommen:

$$\begin{aligned}
\lim_n (Q^{(n)}f)(x_n) &= \lim_n (\frac{nx_n}{2} + \frac{\sqrt{n}\mu c}{\sigma}) f(x_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - (nx_n + \frac{\sqrt{n}\mu(c + x_n)}{\sigma}) f(x_n) \\
&\quad + (\frac{nx_n}{2} + \frac{\sqrt{n}x_n\mu}{\sigma}) f(x_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \\
&= \lim_n [\frac{nx_n}{2} + \frac{\mu c\sqrt{n}}{\sigma}](f(x_n) + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} f'(x_n) + \frac{\sigma^2}{n} f''(x_n + \frac{\sigma\Theta_1}{\sqrt{n}})) \\
&\quad - [nx_n + \frac{\sqrt{n}mu(c + x_n)}{\sigma}] f(x_n) \\
&\quad + [\frac{nx_n}{2} + \frac{\sqrt{n}x_n\mu}{\sigma}](f(x_n) - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} f'(x_n) + \frac{\sigma^2}{n} f''(x_n + \frac{\sigma\Theta_2}{\sqrt{n}})) \\
&= f'(x)(\mu c - x\mu) + \frac{\sigma^2 x}{2} f''(x) \\
&= \frac{\sigma^2 x}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} - \mu(x - c)\frac{df}{dx}
\end{aligned}$$

andere Möglichkeit siehe email von Matthias Birkner.

Aufgabe 32
a)

Wann passiert etwas? naürlich dann, wenn der erste von n Weckern mit Rate β und n Weckern mit Rate δ der erste klingelt. Und diese Zeit ist $\exp(n(\beta + \delta))$ verteilt. Somit ist $Q(n, n) = -q_n = -n(\beta + \delta)$.
Wann ist dieser erste Wecker ein Todeswecker? Genau dann, wenn von n Weckern mit Rate δ der kleinste vor allen n Weckern mit Rate β klingelt. Wir machen uns zunutze, dass $P(\exp(\alpha) < \exp(\beta)) = \alpha/(\alpha + \beta)$ gilt:

$$\begin{aligned}
P(\min_n \exp(\delta) < \min_n \exp(\beta)) &= P(\exp(n\delta) < \exp(n\beta)) = \frac{n\delta}{n(\delta + \beta)} \\
&= \frac{\delta}{\beta + \delta} = J(n, n - 1)
\end{aligned}$$

Analog ist $J(n, n+1) = \frac{\beta}{\beta+\delta}$. Somit ist $Q(n, n-1) = q_n J(n, n-1) = \frac{n(\beta+\delta)\delta}{\beta+\delta} = n\delta$.
Analog ist $Q(n, n + 1) = n\beta$.

b)

Intuitiv klar. Jedes Kind eines Galton-Watson Prozesses ist wieder Vater eines unabhängigen GW-Prozesses. Also ist die Wkeit, dass ein GW-Prozess mit 2 Anfangseltern zum Zeitpunkt t tot ist, genausogross, als ob 2 unabhängige GW-Prozesse mit einem "Elternteil" zur Zeit t tot sind.

c)

backward-equation:

$$\frac{d}{dt}P_t(x,y) = \sum_z Q(x,z)P_z(z,y).$$

(Prop. 4.1) erfüllt, da minimalprozess konstruierbar, da selbst wenn die Todesrate Null ist, keine explosion in endlicher zeit vorliegt ($\mathbb{E}(\zeta) = \sum \frac{1}{n\beta} = \infty$)

Wir setzen $x = 1, y = 0$ und merken uns noch, dass wegen b) gilt: $\phi(t)^2 = P_2[X_t = 0]$. Jetzt noch einsetzen und ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_t(1,0) &= Q(1,0)P_0(X_t = 0) + Q(1,1)P_1(X_t = 0) + Q(1,2)P_2(X_t = 0) \\
&= \delta - (\beta + \delta)P_1(X_t = 0) + \beta P_2(X_t = 0) \\
&= \delta - \beta\phi(t) - \delta\phi(t) + \beta\phi(t)^2 \\
&= \phi'(t)
\end{aligned}$$

Rechnen wir jetzt noch $\phi(t)$ aus:

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt} &= \beta\phi^2 - (\beta+\delta)\phi + \delta \\
\Leftrightarrow \frac{d\phi}{dt} &= (\phi - 1)(\beta\phi - \delta) \\
\Leftrightarrow \int dt &= \int \frac{d\phi}{(\phi-1)(\beta\phi-\delta)} \\
\Leftrightarrow c + t &= \int \frac{\left(\frac{1}{\phi-1} - \frac{\beta}{\beta\phi-1}\right)}{\beta - \delta} d\phi \\
\Leftrightarrow (\beta-\delta)(C+t) &= \int \frac{1}{\phi-1}d\phi - \int \frac{\eta}{\beta\phi-\delta}d\phi \\
\Leftrightarrow (\beta-\delta)(C+t) &= \log(\phi-1) - \beta\frac{\log(\beta\phi-\delta)}{\beta} \\
\Leftrightarrow \exp((\beta-\delta)(C+t)) &= \frac{\phi-1}{\beta\phi-\delta} \\
\Leftrightarrow \phi\left[\beta\exp((\beta-\delta)(C+t)) - 1\right] &= \delta\exp((\beta-\delta)(C+t)) - 1 \\
\Leftrightarrow \phi(t) &= \frac{\delta e^{(\beta-\delta)(C+t)} - 1}{\beta e^{(\beta-\delta)(C+t)} - 1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 33

a)

Der Erwartungswert der Wartezeit bis die Population von 0 bis N wächst, ist der Erwartungswert von ersten N Wartezeiten:

$$\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} Exp(\beta_i)) = \sum \mathbb{E}Exp(\beta_i) = \sum \frac{1}{\beta_i}.$$

Die Varianz berechnet man genauso:

$$Var(\sum_{i=1}^{n} Exp(\beta_i)) = \sum VarExp(\beta_i) = \sum \frac{1}{\beta_i^2}.$$

Die LaPlaceTransformation geht ähnlich, da die Wartezeiten ja unabhängig sind:

$$\mathbb{E}e^{-t(\sum Exp(\beta_i))} = \prod \mathbb{E}e^{-tExp(\beta_i)}$$

$\mathbb{E}e^{-tX}, \quad X \sim Exp(\beta_i)$ müssen wir noch ausrechnen (Dichte: $\beta_i e^{-\beta_i x}$):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-tX} &= \int_0^\infty e^{-tx}\beta_i e^{-\beta_i x} dx \\ &= \beta_i \int_0^\infty e^{-x(t+\beta_i)} dx \\ &= \frac{\beta_i}{t+\beta_i} \end{aligned}$$

Damit haben wir letzendlich als LaPlaceTransformierte:

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{t+\beta_i} \right).$$

b)
Die ersten k Ereignisse sollen alles Geburten sein. Fangen wir bei einer Population i an, so muss eine Exp(β_i)-verteile ZV kleiner ausfallen, als eine Exp(μ_i)-verteilte. Danach müssen wir eine Exp(β_{i+1})-verteile ZV mit einer Exp(μ_{i+1}) verteilten vergleichen usw.:

$$P(...) = \prod_{n=0}^{k-1} (Exp(\beta_{i+n}) < Exp(\mu_{i+n})) = \prod_{n=0}^{k-1} \frac{\beta_{i+n}}{\beta_{i+n} + \mu_{i+n}}.$$