Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

1. Juni 2002

Aufgabe 34
a)

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \sum_x \pi(y)P(y,x) = \pi(y)$$

b)
Angenommen $\pi(x)R(x,y) > \pi(y)R(y,x)$. Dann akzeptieren wir nur mit Wkeit p. Somit ist

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(x)R(x,y)\frac{\pi(y)R(y,x)}{\pi(x)R(x,y)} = \pi(y)R(y,x).$$

Die Rückrichtung akzeptieren wir dann also immer:

$$\pi(y)P(y,x) = \pi(y)R(y,x)$$

Der zweite Fall geht analog.

c)
Hier soll nurnoch einmal klargemacht werden, dass wir bei der obigen Methode immer nur die Quotienten $\pi(y)/\pi(x) = 1/r(x,y)$ und R benötigen:
Wenn also $\frac{\pi(x)R(x,y)}{\pi(y)R(y,x)} = r(x,y)\frac{R(x,y)}{R(y,x)} > 1$ (Erste Fall aus der a), dann setze $P(x,y) := R(y,x)\frac{1}{r(x,y)}$, ansonsten $P(x,y) := R(x,y)$.

Aufgabe 35
a)

$$X = c \qquad \mathbb{E}[Z|X] = \frac{\mathbb{E}[ZI_{\{X=c\}}]}{P(X=c)} = \mathbb{E}[Z]$$

b)

$$\mathbb{E}[\alpha Z_1 \beta Z_2|X] = \frac{\mathbb{E}[(\alpha Z_1 + \beta Z_2)|I_{X\in B}]}{P(X\in B)} = \frac{\alpha\mathbb{E}[Z_1|I_{\{X\in B\}}]}{P(X\in B)} + \frac{\beta\mathbb{E}[Z_2|I_{\{X\in B\}}]}{P(X\in B)}$$

c)

$$\begin{aligned}
Z_1 \le Z_2 a.s. \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z_1] \le \mathbb{E}[Z_2] a.s. \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z_1 I_{\{X\in B\}}] \le \mathbb{E}[Z_2 I_{\{X\in B\}}] a.s. \forall B \\
&\Rightarrow \quad \frac{\mathbb{E}[Z_1 I_{\{X\in B\}}]}{P(X\in B)} \le \frac{\mathbb{E}[Z_2 I_{\{X\in B\}}]}{P(X\in B)} a.s. \forall B \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{E}[Z_1|X] \le \mathbb{E}[Z_2|X] a.s.
\end{aligned}$$

d)

$$\mathbb{E}[Z|X] = \frac{1}{P(X \in B)} \int_B \int_{-\infty}^{\infty} zP(X \in dx)\Pi(x, dz)$$

oder, der Reihe nach: sei $\varphi(x) := \mathbb{E}[Z|\{X = x\}] = \int z\pi(x, dz)$. Es gilt

$$\mathbb{E}[ZI_{\{X \in B\}}] = \mathbb{E}[\varphi(X)I_{\{X \in B\}}] = \int 1_B(x) \int z\pi(x, dz)dx.$$

Daraus folgt dann das, was wir am Anfang hatten.

Aufgabe 36

a)

O.B.d.A. können wir Annehmen, dass $\mathbb{E}[Y_i] = 0$ ist. Denn es ist irrelevant, wo die ZVs liegen, wenn lediglich die Tendenz der einen, die andere zu über(unter)schreiten gefragt ist. Daher können wir sie vorher zentrieren (man kann aber auch nachrechnen und sehen, dass sich die aus der ersten Zeile weggelassen Terme sich in der dritten Zeile wiederfinden).

Mit $a := \frac{\sigma_2 \kappa}{\sigma_1}$ gilt:

$$\begin{aligned}
Cov(aY_1, Y_2 - aY_1) &= \mathbb{E}[(aY_1)(Y_2 - aY_1)] - \mathbb{E}(aY_1) \cdot \mathbb{E}(Y_2 - aY_1) \\
&= a\mathbb{E}(Y_1 Y_2) - a^2\mathbb{E}(Y_1^2) \\
&= aCov(Y_1, Y_2) - a^2 Var(Y_1) \\
&= a\kappa\sigma_2\sigma_1 - a^2\sigma_1^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

b)

Wie eben gesehen sind $Y_1 := \frac{\sigma_2\kappa}{\sigma_1} Z_1$ und $Y_2 := Z_2 - \frac{\sigma_2\kappa}{\sigma_1} Z_1$ unkorreliert, normalverteilt (die Summe von normalverteilten ZVs ist normalverteilt) und somit in diesem Fall unabhängig.

Weiterhin ist $Z_2 = Y_2 + Y_1$. Die Varianz von Y_2 ist

$$Var(Y_2) = \mathbb{E}[Z_2^2 + \frac{\sigma_2^2\kappa^2 Z_1^2}{\sigma_1^2} - 2\frac{Z_1 Z_2 \sigma_2 \kappa}{\sigma_1}] = \sigma_2^2(1 - \kappa^2)$$

Der Erwartungswert ist $\mu_2 - \frac{\sigma_2\kappa}{\sigma_1}\mu_1$.

Ist $Z_1 = z_1$ gegeben, so ist Y_1 eine Konstante und

$$Var(Z_2|Z_1 = z_1) = Var(Y_2 + Y_1|Z_1 = z_1) = Var(Y_2) = \sigma_2^2(1 - \kappa^2)$$

Der bedingte Erwartungswert ist dann

$$\mathbb{E}[Z_2|Z_1 = z_1] = \mathbb{E}[Y_2|Z_1 = z_1] + \mathbb{E}[Y_1|Z_1 = z_1] = \mu_2 + \frac{\sigma_2\kappa}{\sigma_1}(z_1 - \mu_1)$$