Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

7. Juli 2001

Aufgabe 37
Sei Z die größte von 5 uniform auf $[0,1]$ verteilten ZVs (X_i). Wenn $Z = z$ ist, dann sind die restlichen vier uniform auf $[0,z]$ verteilt. Sei Y das Minimum dieser ZVs. Die bedingte Verteilung $\Pi(z,dy)$ ist dann die Ableitung der Verteilungsfunktion von Y:

$$\begin{aligned} F(Y < y) &= 1 - P(X_1, X_2, X_3, X_4 \geq y) \\ &= 1 - P(\frac{z-y}{z})^4 \\ \Rightarrow \Pi(z,dy) &= 4(\frac{z-y}{z})^3 dy \end{aligned}$$

Der Erwartungswert ist dann

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y|Z=z] &= \int_0^z y\Pi(z,dy) \\ &= \int_0^z y4(\frac{z-y}{z})^3 dy \Rightarrow \\ \mathbb{E}[Y|Z=\frac{2}{3}] &= \int_0^{\frac{2}{3}} 6y(1-\frac{3}{2}y)^3 dy \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Aufgabe 38
a)

Wähle $X_n = \pm 1$ mit Wkeit von je $\frac{1}{2}$. Dann ist $\mathbb{E}(X_n) = 0 = \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) \neq X_n$.

b)

Seien Y_n unabhängig mit $P(Y_n = -1) = \frac{n^2}{n^2+1}$ und $P(Y_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$. Definiere $X_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. Dann ist zum einen $\mathbb{E}(X_n) = \sum \mathbb{E}(Y_i) = 0$, zum anderen ist (X_n) ein Martingal, denn $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1}|X_n] = \mathbb{E}[X_n|X_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}|X_n] = X_n + 0$.

Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$P(\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : Y_n = -1) = 1.$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
& P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N+n}(X_1 + \cdots + X_N + \cdots + X_{N+n}) = -\infty) \\
= \quad & P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N+n}(X_1 + \cdots + X_N) + \frac{1}{N+n}((X_N - 1) + \cdots + (X_N - n)) = -\infty) \\
= \quad & P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N+n} + \frac{nX_n}{N+n} - \frac{n(n+1)}{2(N+n)} = -\infty) \\
= \quad & 1
\end{aligned}
$$

Aufgabe 39
a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|F_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} - B_{n+1}|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}[X_i - X_{i-1}|F_{i-1}]|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|F_n] - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i - X_{i-1}|F_{i-1}]|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1}|F_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}|F_n] + \mathbb{E}[X_n|F_n] - \mathbb{E}[B_n|F_n] \\
&= X_n - B_n = M_n
\end{aligned}
$$

b)
B_n ist genau dann previsible wenn B_n F_{n-1} adaptiert ist; also wenn die Ereignisse von B_n in die σ-Algebra F_{n-1} fällt.
Da $D_n := \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|F_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|F_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1}|F_{n-1}]$ ist D_n F_{n-1} adaptiert und somit previsible (der Erwartungswert ?????).
Dann ist $B_n := \sum_{i=1}^{n} D_i$ somit $\cup_{i=0}^{n-1} F_i$ adaptiert. Und da die F_i eine Filtration darstellen, ist B_n also F_{n-1} adaptiert.

c)
Sei $X_n = M_n + B_n = M'_n + B'_n$.
$M_n = X_n - B_n = M'_n + B'_n - B_n$ ist ein Martingal. Wegen $B_0 = B'_0$ ist $M_0 = M'_0$.
Also

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[M'_{n+1} + B'_{n+1} - B_{n+1}|F_n] &= M_n \\
\Leftrightarrow M'_n + B'_{n+1} - B_{n+1} &= M_n \text{ da } M_n \text{ Martingal und } B, B' \text{ previsible} \\
\Leftrightarrow M'_n + B'_{n+1} &= M_n + B_{n+1}
\end{aligned}
$$

Sei nun $M_n = M'_n$. Dann ist wegen der letzten Zeile auch $B_{n+1} = B'_{n+1}$. Dann ist aber wiederum $M_{n+1} = M'_{n+1}$.

Aufgabe 40
Wir müssen zeigen, dass M_n ein Supermartingal ist. Da sogar $\sup_n |M_n| < \infty$ (da $M_n > 0$) können wir den Konvergenzsatz für Martingale anwenden. Und wir wissen sowieso schon aus Aufgabe 27, dass M_n gegen folgende Verteilung konvergiert

$$
\frac{X}{Y+Z}, \qquad X, Y, Z \sim Exp(1).
$$

M_n ist ein Martingal, denn (mit $X_n =: X$)

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n] & = & \mathbb{E}[\frac{X_{n+1}+1}{n+3}|\frac{X_n+1}{n+2}] \\
& = & \frac{X_n+1}{n+2}\cdot\frac{X_n+2}{n+3}+(1-\frac{X_n+1}{n+2})\frac{X_n+1}{n+3} \\
& = & \frac{X^2+2X+X+2}{(n+2)(n+3)}+\frac{Xn-X^2+X+n-X+1}{(n+2)(n+3)} \\
& = & \frac{3X+Xn+3}{(n+2)(n+3)} \\
\frac{3X+Xn+3}{(n+2)(n+3)} & \leq & M_n = \frac{X+1}{n+2} \\
& \Leftrightarrow & \\
\frac{3X+Xn+3}{(n+3)} & \leq & X+1 \\
& \Leftrightarrow & \\
0 & \leq & n
\end{array}
$$