Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

24. April 2002

Aufgabe 1
a)
Wir setzen $g(x) := P_x(\exists n \geq 0 : X_n = 0)$. Die Frage ist also, wie wahrscheinlich es ist, von x aus die Null zu erreichen. Dazu schauen wir uns den “Schritt danach“ an. Entweder gehen wir im nächsten Zeitpunkt nach $x-1$ oder nach $x+1$. Da es eine symmetrische Irrfahrt ist, kommen wir dorthin jeweils mit W'keit $1/2$.
Also ist $g(x) = g(x-1)/2 + g(x+1)/2$.

Aus Symmetriegründen muss $g(1) = g(-1)$ gelten und somit ist $g(0) = g(1)$. Dann gilt aber auch

$$g(1) = g(0)/2 + g(2)/2 = g(1)/2 + g(2)/2 \Leftrightarrow g(1) = g(2).$$

Also gilt $g(x) = g(y) \forall x, y \in \mathbb{Z}$. Trivialerweise gilt aber auch $g(0) = 1$.

Man kann auch argumentieren, angenommen $g(1) =: a < 1 \Rightarrow 2g(0) = 2 = g(-1) + a \Leftrightarrow 2 - a = g(-1) > 1$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

Also kommen wir mit W'keit Eins von jedem Punkt wieder zur Null zurück. Somit ist Null per Definition rekurrent. Da $\forall x \in \mathbb{Z} \exists n \in \mathbb{N} P^n(0, x) > 0$ sind alle Werte von $\mathbb{Z}$ rekurrent[1].

b)
Gesucht ist $h(x) := h_y(x) := P_x(X \text{ trifft } y \text{ vor der Null})$.
Wir haben

$$h(0) = 0, \qquad h(y) = 1, \qquad h(x) = \frac{h(x-1)}{2} + \frac{h(x+1)}{2} \text{ für } 0 < x < y.$$

Also $h(1) = 0 + \frac{h(2)}{2} \Leftrightarrow h(2) = 2h(1)$. So können wir auch alle weiteren berechnen: $h(3) = 2\frac{h(2)}{2} - 2\frac{h(1)}{2} = 3h(1)$. Durch vollst. Induktion zeigt man formal, dass wirklich $h(x) = xh(1)$ ist. Da $h(y) = (y)h(1) = 1 \Leftrightarrow h(1) = \frac{1}{y}$ ist somit $h(x) = \frac{x}{y}$.

Aufgabe 2
a)
Wir partitionieren die Irrfahrt (startend in 0) X in solche Irrfahrten $D^{(l)}$, welche bei l beginnen und das erste Mal $l+1$ treffen, $l = 0, 1, 2, \ldots$.
Jede Irrfahrt $D^{(l)}$ startet per Definition in l und endet in $l+1$. Aus der 1b) wissen wir, dass die W'keit dabei die Null nicht zu treffen genau $\frac{l}{l+1}$ und somit $P(0 \in D^{(l)}) = 1 - l/(l+1) = 1/(l+1)$ ist.

[1] jedoch nicht positiv rekurrent; also besitzt die einfache Irrfahrt auch keine Gleichgewichtsverteilung

Selbstverständlich gilt dann

$$\sum_{l=0}^{\infty}\left(1-\frac{l}{l+1}\right)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l-(l-1)}{l}=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}=\infty.$$

b)
Wir können das Ereignis von "$D^{(l)}$ trifft die Null" als Bernoulli-Experiment mit Erfolgsw'keit $p_l = 1/(l+1)$ auffassen. Da sich diese W'keiten zu Unendlich aufsummieren besagt nun das Borel-Cantelli-Lemma, das im Laufe der Zeit unendlich viele Erfolge eintreten. Also kommt die Irrfahrt unendlich oft zur Null zurück, unabhängig von ihrem bis dahin erreichtem level.

c)
Wegen der Gedächtnislosigkeit gilt:

$$P_x\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right] = P_x\left[\max_{0\le k\le R_{z-1}} Y_k < y\right] P_{z-1}\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right]$$

Iterieren wir obiges weiter und beachten, dass besagte Exkursionstiefe nicht vom absoluten Startpunkt abhängig ist, so erhalten wir

$$P_x\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right] = \prod_{w=x}^{z-1} P_w\left[\max_{0\le k\le R_{w+1}} Y_k < y\right] = P_x\left[\max_{0\le k\le R_{x+1}} Y_k < y\right]^{z-x}.$$

Wir haben dir Irrfahrt somit analog zur 2a) zerlegt: wir betrachten immer die Abschnitte von letzten aktuellen Maximum w zum nächsten $w+1$.
In jedem Abschnitt stellt sich die Frage, ob wir uns y-weit von diesem letzten Maximum w entfernen. Da die Markovkette gedächtnislos bzw. verschiebungsinvariant ist, reduziert sich das Ganze auf das $z-x$ malige Wiederholen eines einzigen Experiments.

Um die Rechnung zu erleichtern betrachten wir nicht die Markovkette Y_k (also die Differenzen zum letzten Maximum), sondern die Markovkette $y - Y_k$. Somit ist mittels der 1b) nun

$$P_x\left[\max_{0\le k\le R_{x+1}} Y_k < y\right] = P_y(X \text{ erreicht } y+1 \text{ ohne die 0 zu treffen}) = \frac{y}{y+1}.$$

Zusammen ergibt sich also $P_x\left[\max_{0\le k\le R_z} Y_k < y\right] = \left(\frac{y}{y+1}\right)^{(z-x)}$.

Aufgabe 3 Wir haben einen Baum, in dem wir uns mit W'keit 2/3 nach unten bewegen (sonst nach oben). Wir fragen uns also, ob es möglich ist, dass eine solche Irrfahrt nichtmehr zurückkommt.

Intuitiv ist die Sache klar, denn im Erwartungswert geht es 1/3 pro Schritt nach unten.

Um dies formal zu zeigen, sehen wir uns die W'keit $h_d(x)$, vom Punkt x aus die Tiefe d zu erreichen, ohne zur Tiefe 0 zu gelangen, an. Wie in Aufgabe 1 errechnen wir eine Verteilung $h_d(x)$ mit

$$h_d(x) = \frac{h_d(x-1)}{3} + \frac{2h_d(x+1)}{3}, \qquad h_d(0) = 0, \qquad h_d(d) = 1.$$

Mit vollst. Induktion zeigt man, dass $h_d(x) = \frac{2^x-1}{2^{x-1}} \cdot \frac{2^{d-1}}{2^d-1}$. Lassen wir nun d gegen unendlich gehen, haben wir

$$\lim_{d\to\infty} = \frac{2^x-1}{2^{x-1}}\frac{1}{2}.$$

Sie ist also positiv und somit ist jeder Punkt[2] bzw. die Irrfahrt transient.

Aufgabe 4 Das Programm ist recht einfach zu schreiben.
Wer es ausrechnen will, der muss einfach ein Gleichungssystem lösen, dessen Ergebnis ist:

$$\pi(1) = \pi(2) = \frac{3}{14+a}, \pi(3) = \pi(4) = \frac{4}{14+a}, \pi(5) = \frac{a}{14+a}.$$

Damit die W'keit sich in Zustand 5 zu befinden 0.5 ist, muss $a = 14$ sein.
Natürlich ist es egal, in welchem Zustand man anfängt (siehe Konvergenztheorem).

[2]es reicht auch aus, dass $x = 1$ transient ist