Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“ 6-10

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

4. Mai 2002

Aufgabe 5
a)
Offensichtlich ist der Erwartungswert von der Form

$$m_z(y) = P_z(R_y > R_z) \cdot 0 + P_z(R_y < R_z)\mathbb{E}_y\left(\sum_{n=0}^{R_z} I_{\{X_n=y\}}\right),$$

also Null Besuche falls die Exkursion von z nach z garnicht an y vorbeikommt, plus die erwartete Anzahl der Besuche in y im Falle, wenn die Exkursion y vor z trifft.
Zur Abkürzung sei im Folgenden $Y := \sum_{n=0}^{R_z} I_{\{X_n=y\}}$ und $p := P_y(R_z < R_y)$.
$P_y(Y = 1) = p$, da die Anzahl der Besuche in y, von y aus startend, genau dann Eins ist, wenn danach z vor y getroffen wird.
Wegen der Gedächtnislosigkeit kann nach jeder Rückkehr nach y die Vergangenheit ignoriert werden, also ist somit dann $P_y(Y = 2) = (1-p)p, \ldots, P_y(Y = n) = (1-p)^{n-1}p$.
Jetzt muss nurnoch nachgerechnet werden:

$$\begin{aligned}
m_z(y) &= P_z(R_y < R_z)\mathbb{E}(Y) = P_z(R_y < R_z)\left[\sum_{n=0}^{\infty} nP(Y = n)\right] \\
&= P_z(R_y < R_z)\left[\sum_{n=0}^{\infty} n(1-p)^{n-1}p\right] \\
&= P_z(R_y < R_z)\frac{p}{((1-p)-1)^2} = \frac{P_z(R_y < R_z)}{p}
\end{aligned}$$

Und da z und y in der gleichen rekurrenten Klasse sind, ist insbesondere p echt grßser Null und somit $m_z(y) < \infty$.
b)

$$\forall y \in S_0 : m_z(y) < \infty \Rightarrow m_z(S_0) = \sum_{y \in S_0} m_z(y) < \infty,$$

da S_0 endlich ist. Und eine endliche Summe über endliche Werte ist wieder endlich. Da die Gesamtmasse endlich ist und z rekurrent, ist $\frac{m_z(y)}{m_z(S_0)} =: \pi(y)$ eine Gleichgewichtsverteilung.

c)

Angenommen es existiert kein $x \in S_0$, so das x rekurrent ist, dann müssen alle Zustände transient sein.

Da S_0 endlich ist gilt für alle $x \in S_0 : P(V(z) = \infty) = 0$ und somit gilt für die Summe aller Besuche in allen Zuständen $\sum_{x \in S_0} V(x) < \infty \quad a.s.$, was offensichtlich ein Widerspruch ist.

d)

Da der Zustandsraum endlich ist gibt es nach c) mindestens einen rekurrenten Zustand und somit wegen b) auch mindestens eine Gleichgewichtsverteilung.

Aufgabe 6 Wie schon in den notes erwähnt, ist die erwartete Anzahl der Besuche von x bei Start in z bis zur Rückkehr in z genau $m_z(x) = E_z(\sum_{n=1}^{R_z} I_{\{X_n=x\}})$, ein invariantes Maß (kein W'keitsmaß!); also $m_z P = m_z$. Da wir eine einfache, symmetrische Irrfahrt betrachten, besteht diese Summe nur aus zwei Summanden:

$$m_z(x) = \frac{1}{2} m_z(x-1) + \frac{1}{2} m_z(x+1)$$

Da $m_z(x+1) - m_z(x) = m_z(x) - m_z(x-1)$ ist m_z linear und von der Form $a + b \cdot x$. Da $m_z(x) > 0$ für alle $x, z \in \mathbb{Z}$ muss $a > 0$ und $b = 0$ sein. Zum Schluss ist noch $m_z(z) = 1$ und somit ist die erwartete Anzahl der Besuche in x immer genau 1, egal von wo man startet und x gewählt hat.

Eine andere, auch schöne und vor allem kurze Variante ist diese:
Nach Aufgabe 5a) ist $m_z(x) = \frac{P_z(R_x < R_z)}{P_x(R_z < R_x)}$. Nun ist die einfache Irrfahrt symmetrisch und die Wahrscheinlichkeit von z nach x noch vor der Rückkkehr nach z zu kommen ist natürlich die gleiche, wie von x aus nach z zu kommen, ohne dabei x zu treffen. Also ist $m_z(y) = 1$.

Aufgabe 7 a)

Interpretieren wir + als 1 und - als 0, so beschreiben die $\eta^{(i)}$ eine Irrfahrt auf einem N-dimensionalen Würfel (wir sehen uns also erst ein feineres Modell an und vergröbern dann, in dem wir alle Ecken mit gleich vielen Einsern zusammenfassen). Als Übergangswahrscheinlichkeit haben wir

$$P(\eta, \eta') = \begin{cases} \frac{1}{N} & d(\eta, \eta') = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Abbildung f definiert sich dann durch $f : \Omega \to [0, N]$ mit $\eta \mapsto \sum \eta^{(i)}$.
Jedes η kann durch N verschiedene andere η entstehen; diese haben alle das Gewicht $\frac{1}{2^N}$, denn bei der Irrfahrt auf dem Würfel sind alle Punkte gleichberechtigt. Schliesslich kann jedes η auf $\binom{N}{x}$ verschiedene Arten entstehen (x Einser aus N Komponenten auswählen). Somit haben wir als gesuchte Gleichgewichtsverteilung

$$\pi(x) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{x}.$$

Man kann noch nachprüfen, dass diese die notwendigen Bedingungen erfüllt:

$$\pi(0) = \frac{\pi(1)}{N}, \quad \pi(N) = \frac{\pi(N-1)}{N}, \quad \pi(x) = \pi(x-1)\frac{N-(x-1)}{N} + \pi(x+1)\frac{x+1}{N}$$

b)

Betrachten wir die Menge mit gerade Anzahl von Einser und die mit ungerade Anzahl. Bei einer geraden Anzahl von Schritten bleibt man in dieser Menge; bei ungeraden Schritten wechselt man die Menge. Also ist $P^n(z,\cdot)$ periodisch und konvergiert nicht. Das heisst

$$\limsup_{n\to\infty} P^n(z,x) > \liminf_{n\to\infty} P^n(z,x) = 0.$$

Denn für gerade bzw. ungerade n ist $P^n(z,x)$ entweder immer Null oder konvergiert gegen $\pi_{textneu}$ (siehe unten).
Dagegen konvergiert $P^{2n}(z,\cdot)$ schon, weil man dann in einer Menge bleibt. Also $P^{2n}(z,z) > 0$ für alle ungeraden bzw. geraden z. Mit $n \to \infty$ konvergiert der Ausdruck gegen die alte Gleichgewichtsverteilung, eingeschränkt auf die geraden oder ungeraden Summen von Einser mit den doppelten Gewichten (im feineren Modell werden die Ecken des Würfels also in zwei gleich grosse Mengen aufgeteilt). Also mit i gerade oder ungerade: $\pi_{textneu}(i) = \frac{1}{2^{N-1}}\binom{N}{i}$.

c)

$$\pi Q = \pi\frac{1}{2}(P+I) = \frac{\pi P}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

Also konvergiert $Q^n(z,\cdot)$ gegen die alte Gleichgewichtsverteilung π.

Aufgabe 8

a)

Die X_n sind abhängig, denn $P(X_n = H^nT^m | X_{n-1} = H^{n-1}T^m) = \frac{1}{p} \neq P(X_n = H^nT^m) = \frac{1}{p^nq^m}$. Aber es ist eine Markovkette, denn $P((((X_0,X_1),X_2),\dots),X_n) = P(X_{n-1},X_n)$, da X_n bereits alle Informationen über $l-1$ Stellen des Patterns der Länge l liefert; also sind alle früheren X_i ohne Bedeutung.

b)

Da die Ausgänge Head und Tail unabhängig sind ist die Gleichgewichtsverteiltung eines patterns schnell gefunden. Ein pattern, in dem n mal H und m mal T erscheint hat W'keit p^nq^m. Also ist $\pi(HTHT) = p^2q^2$. Wer das nicht glaubt, kann sofort nachrechnen, dass $\pi P = \pi$ ist.
Theorem 1.1 sagt uns nun, dass $\pi(HTHT) = \frac{1}{E_{HTHT}(R_{HTHT})} \Leftrightarrow E_{HTHT}(R_{HTHT}) = \frac{1}{p^2q^2}$. Denn wir befinden uns in einer stationären Verteilung und betrachten die Zeiten zwischen dem erscheinen zweier Ereignisse. Bei einer patternlänge von 4 kann man so NUR die Verteilung zeischen 2 solchen Ereignissen so verwenden; so kann man nicht die Wartezeit von der 0 bis HTHT berechnen.

c)

Wir betrachten immer Pattern der Länge 4. Beim Start in $HTHT$ ist nach dem ersten Wurf das erste H bereits irrelevant, da es nichtmehr in den letzten 4 Stellen liegt. Da HTHT mit H anfangen muss, muss man mindestens noch einmal werfen, um ein Pattern HTHT zu erhalten. Das erste Paar HT spielt also keine Rolle.

d)

Selbe Argumentation wie bei b). Also $E_{HT}(R_{HT}) = \frac{1}{pq}$.

e)

Wegen der Gedächtnislosigkeit kann man die Erwartungswerte addieren:

$$\begin{aligned}
E_0(R_{HTHT}) &= E_0(\inf n : (X_0,\dots,X_n) = (0,\dots,HTHT)) \\
&= E_0(\inf n : (X_0,\dots,X_n) = (0,\dots,HT,\dots,HTHT)) \\
&= E_0(\inf n : (X_0,\dots,X_n) = (0,\dots,HT)) \\
&\quad + E_{HT}(\inf n : (X_0,\dots,X_n) = (HT,\dots,HTHT))
\end{aligned}$$