# Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
*thomas@7t7.de*

11. Mai 2002

**Aufgabe 9** a)
Es ist klar, dass $\forall x, y : 0 \leq Q(x,y) \leq 1$, denn jede Zeilensumme ist Eins:

$$\sum_y Q(x,y) = 1 \Leftrightarrow \sum_y \frac{\pi(y)}{\pi(x)} P(y,x) = 1 \Leftrightarrow \sum_y \pi(y)P(y,x) = \pi(x),$$

da $\pi$ eine Gleichgewichtsverteilung ist, was gerade in der letzten Gleichung steht.

b) Bei der zweiten Gleichung verwende ich eine etwas intuitivere Notation

$$\begin{aligned}
P(X_0 = y | X_1 = x) &= \frac{P(X_0 = y, X_1 = x)}{P(X_1 = x)} \\
&= \frac{\pi(y)P(y,x)}{\pi(x)} = Q(x,y) \\
P(X_0 = y | X_1 = x, X_2 = z) &= \frac{P(X_0 = y, X_1 = x, X_2 = z)}{P(X_1 = x, X_2 = z)} \\
&= \frac{\pi(y)P(y,x)P(x,z)}{\pi(x)P(x,z)} = Q(x,y)
\end{aligned}$$

Man kann die erste Gleichung auch gleich intuitiv beantworten: die Wahrscheinlichkeit im vorigen Zug in $y$ gewesen zu sein, wenn man sich aktuell in $x$ befindet, ist die Wahrscheinlichkeit in $y$ zu sein und dann nach $x$ zu kommen, normiert auf den Fluss nach $x$ (also überhaupt von irgendwo nach $x$ zu kommen).

Die zweite Gleichung bring die “Gedächtnislosigkeit“ zum Ausdruck. Um zu wissen, mit welcher W'keit ich aus $x$ komme, wenn ich mich aktuell in $y$ befinde, ist das Wissen um die Zukunft (danach in $z$ zu sein), nicht von Bedeutung. Es kommt nur auf die Vergangenheit und die Gegenwart an[1]:

$$P(X_0 = y | X_1 = x, X_2 = z) = P(X_0 = y | X_1 = x) = Q(x,y).$$

c)

$$\begin{aligned}
P((...) = (...)) &= \pi(x_0)P(x_0,x_1)P(x_1,x_2)\cdots P(x_{n-1},x_n) \\
&= \left(\pi(x_0)P(x_0,x_1)\frac{1}{\pi(x_1)}\right)\left(\pi(x_1)P(x_1,x_2)\frac{1}{\pi(x_2)}\right)\cdots \\
&\quad \cdots\left(\pi(x_{n-1})P(x_{n-1},x_n)\frac{1}{\pi(x_n)}\right)\pi(x_n) \\
&= Q(x_1,x_0)Q(x_2,x_1)\cdots Q(x_n,x_{n-1})\pi(x_n)
\end{aligned}$$

[1] Wie schon der Name zeitumkehr vermuten lässt. Vorher kam es nur auf die Gegenwart und die Zukunft an, jetzt nur auf die Gegenwart und die Vergangenheit.

**Aufgabe 10**
a)

Wir sehen uns $P(F(Y) = y)$ genauer an und untersuchen diese Wahrscheinlichkeit anhand ihrer möglicher Urbilder. Wenn $F(Y) = y$ ist, dann kann $Y$ alle Werte aus $S_0$ angenommen haben und dann nach $y$ abgebildet worden sein:

$$\begin{aligned} P(F(Y) = y) &= \sum_x P(F(Y) = y, Y = x) \\ &= \sum_x P(x, y) \cdot \pi(x) \\ &= \pi(y) \end{aligned}$$

$Y$ besitzt bzgl. $P$ eine Gleichgewichtsverteilung $\pi$ und $F$ ist von $Y$ unabhängig (daher, und weil $P(x, y) = P(F(x) = y), P(Y = x) = \pi(x)$, ist die Multiplikation OK).

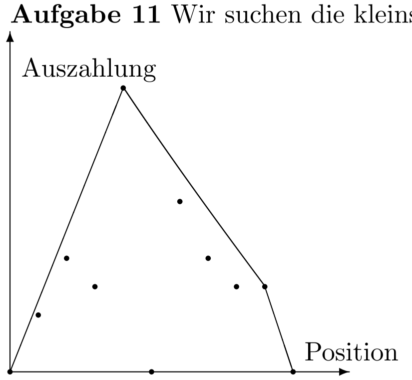
b)

Das Konvergenztheorem sagt uns, dass eine aperiodische, irreduzible Markovkette unabhängig von ihrer Startverteilung gegen eine (eindeutige) Gleichgewichtsverteilung konvergiert.
Da es sich jetzt um ein endlichen Zustandsraum handelt, wissen wir schon, dass es eine Gleichgewichtsverteilung $\pi$ gibt und diese somit wegen a) unter $F$ erhalten bleibt. Dies gilt für alle $y \in S_0$. Da nun also jedes Bild von $S_0$ gemäß $\pi$ verteilt ist und das "Limes-"Bild $R$ sich auf ein (zufälliges) Element konzentriert, ist $Z$ ebenfalls gemäß $\pi$ verteilt.
Bleibt also noch zu zeigen, dass $P$ aperiodisch und irreduzibel ist:

- Da $R$ einelementig ist, muss $P$ irreduzibel sein (ansonsten hätte $R$ soviele Elemente, wie $P$ irreduzible Blöcke hätte)

- Es gibt eine Glg.-vert. $\pi$. Also kann $P$ nur dann periodisch sein, wenn es (O.B.d.A. genau) ein $y$ gibt, so dass $\pi(y) = 0$. Dann gilt aber für all $x \neq y :$ $P(x, y) = 0$ und somit $P(y, y) = 1$. Dann wäre aber $P$ reduzibel.

**Aufgabe 11** Wir suchen die kleinste konkave Majorante von $f$:




Die Erwarteten Auszahlungen können nun einfach an der Funktion abgelesen werden. Optimal stoppt man an den Zuständen 4 (Auszahlung 10) und 9 (Auszahlung 3).
Die Auszahlungen im einzelnen können natürlich auch ausgerechnet werden. In der Aufgabe 1b) haben wir gesehen, dass die W'keit Zustand $y$ von Zustand $x$ zu erreichen ohne die Null zu berühren $h_y(x) = x/y$ ist. Noch besser ist natürlich die

allgemeine Form bei der einfachen Irrfahrt: $h_y^z(x) = \frac{x-z}{y-z}$ - die W'keit beim Start in $x$ den Zustand $y$ vor $z$ zu erreichen.
Also gilt für die Zuständ $0 \leq x \leq 4$:

$$v(0) = 0, v(1) = \frac{1}{4}10 = 2.5, v(2) = \frac{2}{4}10 = 5, v(3) = \frac{3}{4}10 = 7.5, v(4) = 10.$$

Trivialerweise sind $v(10) = 0$ und $v(9) = 3$. Wie sehen die Auszahlungen für $5 \leq x \leq 8$ aus? Sie setzen sich aus den W'keiten Zustand 4 vor 9 zu erreichen mit Auszahlung 10 und der W'keit die 9 vor der 4 mit Auszahlung 3 zu erreichen:

$$v(5) = \left(1 - \frac{5-4}{9-4}\right)10 + \frac{1}{5}3 = 8.6, v(6) = \left(1 - \frac{2}{5}10\right) + \frac{2}{5}3 = 7.2,$$
$$v(7) = \frac{2}{5}10 + \frac{3}{5}3 = 5.8, v(8) = \frac{1}{5}10 + \frac{4}{5}3 = 4.4.$$

**Aufgabe 12** Im Prinzip folgen wir der Funktionsbildung von $v$, wie in den notes beschrieben.
Das bedeutet, dass die Funktion $v$ den erwarteten Betrag beim nochmaligen Drehen beschreibt. Dies tun wir solange, bis die erwartete Auszahlung die aktuelle Auszahlung unterschreitet (wir spielen solange $v > f$ und hören bei $v = f$ auf.
$f(x) = x$. Wird nicht Bankrott gedreht, bekommen wir im Schnitt 600 auf unser Konto. Mit W'keit 11/12 erhöhen wir unser Konto. Unsere Funktion $v$ ist also $v(x) = \frac{11}{12}(x + 600) + \frac{1}{12} \cdot 0$.
Wir stoppen, wenn $v(x) = f(x) = x$. Also

$$\frac{11x}{12} + 550 = x \Leftrightarrow 550 = x - \frac{11}{12}x \Leftrightarrow x = 6600.$$

Wir spielen also solange, bis wir mindestens 6600 erreicht haben.

Zus ausrechnen bemühen wir einen Computer. zu lösen ist das Gleichungssystem $v(0) = \frac{1}{12}(v(100) + v(200) + \cdots + v(1100))$, usw. bis zu $v(6500) = \frac{1}{12}(v(6600) + \ldots v(7600))$. Dabei ist für $x \geq 6600 : v(x) = f(x) = x$.
Wir erhalten den Erwarteten Gewinn von $\approx 2565.1$.

Auch ist die Wahrscheinlichkeit bei Befolgung der Stoppregel bankrott zu gehen, am einfachsten mit dem Computer zu berechnen.
Dazu sei $P(y) := P(\text{erreiche } y/100 \text{ ohne bankrott zu gehen}), x := 1/12$.
Dann gilt folgendes

$$\begin{aligned} P(1) &= x \qquad \text{denn die 100 ist nur vom Start aus mit einem Dreh erreichbar} \\ P(y) &= x\left[\sum_{1 \leq i < y} P(i)\right] + x \text{ für } y \leq 11 \qquad \left(= \sum_{i=0}^{y-1} \binom{y-1}{i} x^i\right) \\ P(y) &= x\left[\sum_{y-11 < i < y-1} P(i)\right] \text{ für } y > 11 \end{aligned}$$

Zusammengefasst lässt sich auch für beliebiges $y$ schreiben

$$P(y) = \left[x\left(\sum_{\max(0,y-11) \leq i \leq y-1} P(i)\right) + xI_{\{y \leq 11\}}\right] I_{\{1 < y < 66\}}.$$

Da $x$ die W'keit Bankrott zu drehen ist, errechnet der Computer

$$P(\text{vorm stoppen bankrott gehen}) = x + x \sum_{0 \le i < 66} P(i) \approx 0.62975.$$