Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

18. Mai 2002

Aufgabe 13
Allgemein gilt für lifetime Prozesse im Gleichgewicht:

$$Q(x,y) = \frac{\pi(y)}{\pi(x)}P(y,x) = \frac{P(R \geq y)/\mathbb{E}(R)}{P(R \geq x)/\mathbb{E}(R)}P(y,x) = \frac{P(R \geq y)}{P(R \geq x)}P(y,x).$$

a)

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{\rho_x}{P(R \geq x)} & \text{wenn } y = 1 \\ \frac{P(R \geq y)}{P(R \geq x)} = P(R \geq y | R \geq x) & \text{wenn } y = x+1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn wenn $y = 1$ war, dann wurde im nächsten Schritt der Tod erreicht und gleichzeitig die neue Lebenszeit ausgewürfelt. Wie wahrscheinlich diese x ist, hängt dann an der Verteilung ($= P(1,x)$).
War man dagegen in $x+1$, so geht es deterministisch nach x, also $P(x+1,x) = 1$.

b)

$$h(x+1) = P(R = x+1 | R \geq x) = \frac{P(R = x+1)}{P(R \geq x)} = Q(x,1).$$

Aufgabe 14
$v(k) = \frac{1}{\mathbb{E}(R)}P(R \geq k)$ und man beachte die geänderte Reihenfolge.

b)

i)

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} r dr = 5, \qquad 10, \qquad \int_1^{\infty} 2\frac{r}{r^3}dr = 2.$$

iii)
$\hat{\rho}(x) = \frac{x}{ER}\rho(x)$

$$\frac{1}{10}\int_0^{10} \frac{r^2}{5}dr = \frac{20}{3}, \qquad \frac{10 \cdot 10}{10} = 10, \qquad \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{r^2}{r^3}dr = \infty$$

a)

$$\begin{array}{lll} a) & v(x) = & \dfrac{10-x}{10}\cdot\dfrac{1}{5} = 0.2 - x/50 \text{ für } 0 \le x \le 10 \\ b) & v(x) = & 1/10 \text{ für } 0 \le x \le 10, \text{ sonst } 0 \\ c) & & P(R \ge k) = 1 - 2\displaystyle\int_1^k \frac{1}{r^3} = 1 - | - r^{-2}|_1^k = 1 + \frac{1}{k^2} - 1 \text{ für } 1 \le x \\ & \Rightarrow v(x) = & \dfrac{1}{2k^2} \text{ für } 1 \le x \end{array}$$

Da die zweite nicht "non-lattice" ist, gibt es keine Konvergenz. Bei den anderen schon.
bii)

$$\int_0^{10} 0.2x - x^2/50 dx = \frac{10}{3}, \qquad \int\limits_0^{10} \frac{x}{10} dx = 5, \qquad \int\limits_1^{\infty} \frac{k}{2k^2} dk = \frac{1}{2} |\log k|_1^{\infty} = \infty$$

Oder auch nachvollziehbar wegen Erwartung im Gleichgewicht $= \mathbb{E}(U\hat{R})$.

Aufgabe 15
a)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\exp(-\beta Y) &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^{\infty} e^{-\beta y} y^{k-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^{\infty} e^{-(\beta+1)y} y^{k-1} dy \\ & \quad \text{substituiere } (1+\beta)y \text{ durch } z \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^{\infty} e^{-z} \left(\frac{z}{1+\beta}\right)^{k-1} \frac{dz}{1+\beta} \\ &= \left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{k} \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^{\infty} e^{-z} z^{k-1} dz \\ &= (1+\beta)^{-k} \end{aligned}$$

b)
Da Y_1, Y_2 unabhängig sind, können wir die Erwartungswerte (also die Laplace-Transformationen) multiplizieren.

$\mathbb{E}\exp(\beta(Y_1+Y_2)) = \mathbb{E}\exp(\beta Y_1)\cdot\mathbb{E}\exp(\beta Y_2) = (1+\beta)^{-k_1}(1+\beta)^{-k_2} = (1+\beta)^{-(k_1+k_2)}$.

$Y_1 + Y_2$ ist also Gamma$(k_1 + k_2)$ verteilt.

Aufgabe 16
Es ist $\mathbb{E}exp(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ und sei $\mathbb{E}G = \mu$. Potentielle Kunden kommen mit Poissonrate α an. Auf der Zeitachse sind das $exp(\alpha)$ verteilte ZVs.
a)
Wir wollen wissen, wieviele Punkte in Erwartung zwischen 0 und G fallen: $\mathbb{E}(K)$. Die Anzahl der Punkte ist, wenn $G = y$, $Pois_{\alpha\cdot y}$ verteilt. Somit ergibt sich

$$\mathbb{E}(K|G=y) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{e^{-\alpha y}(\alpha y)^k}{k!} = \alpha y, \text{ denn } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

Also $\mathbb{E}(K) = \int_{\mathbb{R}^+} \alpha y G(dy) = \alpha\mu$.

b)

X_i ist die Anzahl der Punkte, die in das Intervall $[0, G_i)$ fallen minus Eins (also alle, die ankommen, während einer bedient wird, weniger einem, der fertig bedient wurde). Wir beschränken uns auf die Frage, ob die Schlange immer irgendwann auf 0 zusammenschrumpft (dann hören wir auf oder starten den Prozess von neuem). Wie in a) gesehen, ist $\mathbb{E}(X_i + 1) = \alpha\mu$. Wenn $\alpha = \frac{1}{\mu}$, dann bleibt die Warteschlange nach jeder Bedienung im Mittel konstant ($\mathbb{E}X_i = 0$).

Nach dem angegebenen Fakt (siehe auch Aufgabe 5 vom SS 2001) ist eine solche Markovkette (die Warteschlange) rekurrent.