Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

22. Mai 2002

Aufgabe 17
Es ist $\mathbb{E}exp(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ und sei $\mathbb{E}G = \mu$. Potentielle Kunden kommen mit Poissonrate α an. Auf der Zeitachse sind das $exp(\alpha)$ verteilte ZVs.
a)

Wir machen uns die Gedächstnislosigkeit der Exponentialverteilung zu nutze. Die Auslastungszeit des Schalter ist G verteilt. Endet diese, ist die Wartezeit auf den nächsten Kunden ebenfalls $\exp(\alpha)$ verteilt. Die Wartezeit auf einen Kunden beträgt im Erwartungswert also $\mathbb{E}(G + exp(\alpha)) = \mu + \frac{1}{\alpha}$. Die gesuchte Rate ist dann der Kehrwert: $\frac{1}{\mu+\frac{1}{\alpha}}$.

b)

Wir wollen wissen, wieviele Punkte in Erwartung zwischen 0 und G fallen: $\mathbb{E}(Z)$. Die gesuchte Rate ist dann $\frac{1}{1+\mathbb{E}Z}$. Die Anzahl der Punkte ist $Pois_{\alpha\cdot y}$ verteilt, wenn $G = y$.

$$\mathbb{E}(Z|G = y) = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{e^{-\alpha y}(\alpha y)^k}{k!} = \alpha y.$$

Also ist $\mathbb{E}(Z) = \alpha\mu$.

c)

Die erwartete Wartezeit, bis der nächste Kunde bedient wird, war nach a) $\mu + \frac{1}{\alpha}$. Davon war die Besetztzeit μ. Der Anteil der besetzten Zeit ist also $\frac{\mu}{\mu+1/\alpha}$.

Aufgabe 18
a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(-\beta S_n) &= \mathbb{E}\prod_{i=0}^{n}\exp(-\beta X_i) \\
&= \prod_{n=0}^{n}\mathbb{E}\exp(-\beta Xn) \\
&= (pe^{-\beta} + 1 - p)^n
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\exp(-\beta S_N) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{n!}(pe^{-\beta}+1-p)^n \\
&= e^{-\alpha}\frac{(\alpha p(e^{-\beta}-1)+\alpha)^n}{n!} \\
&= e^{-\alpha}e^{\alpha}\exp((e^{-\beta}-1)\alpha p) \\
&= \exp(-(1-e^{-\beta})\alpha p)
\end{aligned}
$$

c)
S_N ist Poisson(αp)-verteilt. Das α in der Laplace-Transformierten einer Poisson-verteilten ZV ist hier das αp.

d)
Wir geben jedem Punkt ein Label 0 oder 1. Das Label 1 wird mit Ws p vergeben und unabhängig von allem anderen. Dann sind diese Punkte Poisson(αp) verteilt. Heuristisch kann man so argumentieren, dass die Anzahl der Erfolge von vielen Ereignissen, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten sich auf α aufsummieren asymptotisch Poisson(α) verteilt. Tritt jedes dieser Ereignisse nur mit W'keit p ein, dann summieren sich die einzelnen W'keiten nur auf $p\alpha$ auf.
Oder man rechnet nach: das Intensitätsmaß nach dem thinning ist

$$m_p(B) := \int_B p(y)m(dy) = p\int_B m(dy) = pm(B) = p\alpha\lambda(B).$$

Auf $\mathbb{R}$ ist $\lambda(B)$ die Intervalllänge von B.

Aufgabe 19
a)

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \sum_x \pi(y)P(y,x) = \pi(y)$$

b)
Die Übergangsmatrix Pund π sei

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \pi := \left(\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right).$$

Das π eine Gleichgewichtsverteilung ist lässt sich schnell nachrechnen. Die Reversibilitätsbedingung gilt aber nicht, da $\pi(1)P(1,2) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{12} = \pi(2)P(2,1)$ (die anderen sind auch nicht erfüllt).

Eine triviale Lösung ist

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi := \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Aufgabe 20
Im folgenden sei stets zu verstehen

- a, b sind Konfigurationen

- v sind beliebige Koordinaten, w Nachbarpunkte von v, also: $d(v, w) = 1$.
- $x_a(v) \in \{0, 1\}$ ist der Wert der Konfiguration a an der Koordinate v.

Ersteinmal ist klar, dass $\pi(a) = 1/|S_0| \cdot I_{\{a \text{ ist hardcore}\}} = \frac{I_{\{a\in S_0\}}}{|S_0|}$ für alle a die uniforme Gleichgewichtsverteilung afu S_0 ist.

Wieso erreicht die Methode R nicht ihr Ziel?

Damit π eine Gleichgewichtsverteilung bleibt, muss folgendes gelten

$$\pi(a) = \frac{I_{\{a\in S_0\}}}{|S_0|} = \sum_b \pi(b)P(b, a) = \sum_b \frac{I_{\{b\in S_0\}}}{|S_0|} P(b, a) = \sum_{b\in S_0} \frac{1}{|S_0|} P(b, a).$$

P sieht ja folgendermaßen aus

$$P(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } d(a - b) \geq 2 \\ \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{2} & \text{wenn } d(a - b) = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{wenn } a = b. \end{cases}$$

Wenn $a \in S_0$ müsste also $\sum_{b\in S_0, d(a,b)\leq 1} P(b, a) = 1$ sein. Dies ist jedoch nur für $S_0 = \{k \times k\}$ erfüllt, was im Widerspruch zur Forderung an S_0 steht (denn es existieren nicht-hardcore Konfigurationen).
Oder: Widerspruch, weil $\exists c \notin S_0 : P(c, a) > 0$ und $\exists n \in \mathbb{N} : P^n(a, c) > 0$.

Der Aufgabenteil lässt sich auch kurz abhandeln: Eine Gleichgewichtsverteilung auf den hardcore-Gittern kann nur dann erhalten bleiben, wenn die Markovkette diese nicht verlässt.

Wie sieht nun die Methode M aus?

In jedem Schritt kann nur eine Koordinate v verändert werden.
O.B.d.A. gilt $P(a, b) = 0$ wenn $a \notin S_0$ (denn es wird gemäß π in S_0 gestartet und kann nichtmehr verlassen werden).
Für die neue Übergangsmatrix P gilt trivialerweise

$$P(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } d(a - b) \geq 2 \\ P(a, b) \cdot I_{\{a,b\in S_0\}} & \text{wenn } d(a - b) = 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{X}{2k^2} & \text{wenn } a = b, \end{cases}$$

wobei $X = \#\{b | d(a, b) = 1, b \notin S_0\}$ (also die Anzahl der erreichbaren aber unzulässigen Konfigurationen).
Um zu zeigen, dass P immernoch π als linken Eigenvektor hat, reicht es aus zu zeigen, dass P eine Übergangsmatrix ist und

$$\pi(a)P(a, b) = \pi(b)P(b, a) \quad \forall a, b \Leftrightarrow P(a, b) = P(b, a) \quad \forall a, b \in S_0.$$

Wir brauchen uns somit nur den Fall $d(a, b) = 1$ ansehen. In diesem Fall gibt es genau ein v, so dass $x_a(v) \neq x_b(v)$, ansonsten gilt $x_a(w) = x_b(w) \quad \forall w \neq v$. Nach Annahme ist stets $a \in S_0$.

Fall 1: $x_a(v) = 1$. Dann ist $x_b(v) = 0$ und $P(a, b) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{2}$.

Fall 2: $x_a(v) = 0$ und somit $x_b(v) = 1$.

1. Wenn $b \in S_0$, dann ist $P(a, b) = \frac{1}{k^2}\frac{1}{2}$.
2. Wenn $b \notin S_0$, dann ist $P(a, b) = 0$.

Also ist $P(a,b) = P(b,a)$. Prüfen wir noch die Zeilensumme

$$\begin{aligned}\sum_{b\in S_0} P(b,a) &= P(a,a) + \sum_{b\in S_0, d(a,b)=1} P(b,a) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{X}{2k^2} + X \cdot 0 + \frac{k^2 - X}{2k^2} = 1\end{aligned}$$

rreduzibilität und aperiodik sind offensichtlich, da von jeder hardcore-config jede andere hardcore-config erreicht werden kann (spätestens nach k^2 und beliebig mehr Schritten) und es immer eine W'keit des Stillstands gibt.