Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

31. Mai 2002

Aufgabe 21
Lemma 3.5.3 sorgt für die Konvergenz von

$$S_\varepsilon := \underbrace{\int\limits_{\{|y|>\varepsilon\}} y\Phi(dy)}_{I_\varepsilon} - \underbrace{\int\limits_{\{\varepsilon\leq|y|\leq 1\}} y\nu(dy)}_{-A_\varepsilon} = I_\varepsilon + A_\varepsilon$$

für $\varepsilon \to 0$ (in Wahrscheinlichkeit).
Für $A_0 = \lim_{\varepsilon\to 0} A_\varepsilon$ ist dann (etwas informell geschrieben)
a)

$$\begin{aligned}
A_0 &= \int\limits_{\{|y|\leq 1\}} y\cdot y^{-2}dy = \int\limits_{\{|y|\leq 1\}} y^{-1}dy = 0 \quad \text{Symmetrie!} \\
A_0 &= \int\limits_{\{0\leq y\leq 1\}} y\cdot y^{-2}dy = \int\limits_{\{0\leq y\leq 1\}} y^{-1}dy = \log(y)\Big|_0^1 = \infty \\
A_0 &= \int\limits_{\{0\leq y\leq 1\}} y\cdot y^{-3/2}dy = \int\limits_{\{0\leq y\leq 1\}} y^{-1/2}dy = 2\sqrt{y}\Big|_0^1 = 2
\end{aligned}$$

Im ersten Fall handelt es sich um den symmetrischen Cauchy-Prozess, im zweiten um den asymetrischen Cauchy-Prozess und den letzten nennt man 1/2stabilen Subordinator.

b)

α soll so sein, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y^2\wedge 1)c|y|^{-(1+\alpha)}dy < \infty \Leftrightarrow \int\limits_{0<|y|<1} |y|^{(1-\alpha)}dy + \int\limits_{|y|\geq 1} |y|^{-(1+\alpha)}dy < \infty$$

ist. Also muss $\alpha > 0$ sein, da ansonsten der zweite Term unendlich wird. Wegen des ersten Terms muss aber auch $\alpha < 2$ gelten.

Aufgabe 22

a)

Eine Eigenschaft der Poissonschen Punktkonfiguration ist es, dass die Anzahl der Punkte in einer beliebigen Menge des $\mathbb{R}^2$ mit Fläche A poissoinverteilt mit Intensitätsmaß λA ist (λ ist hier der Parameter).

Wenn der Abstand von $x \in \mathbb{R}^2$ zum nächsten Konfigurationspunkt $> t$ ist, bedeutet das, dass in dem Kreis um x mit Radius t kein Konfigurationspunkt ist:

$$P(X > t) = P(Z = 0) = e^{\lambda \pi t^2}, \qquad \text{da } Z \sim \text{Pois}_{\pi t^2} \text{ weil } t^2\pi \text{ die Kreisfläche ist.}$$

Z ist hier natürlich die Anzahl der Punkte in dem Kreis um x mit Radius t.

b)

Mit drei kleinen Kniffen ist die Aufgabe schnell gelöst:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int\limits_{\mathbb{R}_+} tP(X \in dt) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} P(X \geq t)dt = \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda\pi t^2} dt \\
&\quad \text{substituiere } \lambda\pi t^2 = x^2/2 \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{x}{\sqrt{s\lambda\pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_+} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

Denn ruft man sich die Dichte der Normalverteilung ins Gedächtnis, so sieht man, dass $1/\sqrt{2\pi}\int_0^\infty \exp(-x^2/2)dx = 1/2$ war.

c)

Als erstes ziehen wir den Raum zusammen: $t \to \sqrt{t}$. Dann wird aus $P(R_1^2 > t) = P(R_1 > \sqrt{t}) = \exp(-\lambda\pi t)$. Also ist $R_1^2 \sim \exp(\lambda\pi)$ verteilt.
Wenn $X \sim \exp(\alpha)$, dann ist wegen $P(\pi X > t) = P(X > t/\pi) = \exp(-\alpha t/\pi)$ also $\pi R_1^2 \sim \exp(\frac{\lambda\pi}{\pi}) \sim \exp(\lambda)$.
Sei x_{i-1} und x_i die Punkte, die als $i-1, i$-nächsten zu x liegen. Seien K_{i-1} und K_i die Kreise um x, so dass x_{i-1} bzw. x_i auf ihren Rändern liegen.
Wegen der Unabhängigkeit für disjunkte Mengen ist πR_{i-1}^2, gegeben das in K_{i-1} genau $i-1$ Punkte liegen, wieder $\exp(\lambda)$ verteilt. Analog mit πR_i^2 und K_i.
Somit ist $\pi(R_i^2 - R_{i-1}^2)$ wie die Differenz zweier unabhängiger $\exp(\lambda)$ verteilter ZVs verteilt (gegeben die zu subtrahierende ist kleiner). O.B.d.A. sei $i = 2$.

$$\begin{aligned}
& X_i \sim \pi R_1^2 \sim \exp(\lambda) \\
P(X_2 - X_1 > t | X_2 > X_1) &= P(X_2 - X_1 > t, X_2 > X_1)/P(X_2 > X_1) \\
&= \frac{\int_t^\infty e^{-\lambda s}\left(1 - e^{-\lambda(s-t)}\right) ds}{1/2} \\
&= \lambda \left| -\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} + \frac{e^{-2\lambda s + \lambda t}}{2\lambda} \right|_t^\infty \cdot 2 \\
&= e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Wegen der Gedächtnislosigkeit sind sie auch unabhängig.

Aufgabe 23

a)

Angenommen $\pi(x)R(x,y) > \pi(y)R(y,x)$. Dann akzeptieren wir nur mit Wkeit p. Somit ist

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(x)R(x,y)\frac{\pi(y)R(y,x)}{\pi(x)R(x,y)} = \pi(y)R(y,x).$$

Die Rückrichtung akzeptieren wir dann also immer:

$$\pi(y)P(y,x) = \pi(y)R(y,x)$$

Der zweite Fall geht analog; nur andersum.

b)

Hier soll nurnoch einmal klargemacht werden, dass wir bei der obigen Methode immer nur die Quotienten $\pi(y)/\pi(x) = 1/r(x,y)$ und R benötigen:
Wenn also $\frac{\pi(x)R(x,y)}{\pi(y)R(y,x)} = r(x,y)\frac{R(x,y)}{R(y,x)} > 1$ (Erste Fall aus der a), dann setze $P(x,y) := R(y,x)\frac{1}{r(x,y)}$, ansonsten $P(x,y) := R(x,y)$.

Aufgabe 24
Bei beiden Aufgaben geht es um die MarkovChainMonteCarlo-Methode.

Wir haben die Gleichgewichtsverteilung auf allen hardcore-Konfigurationen und eine Übergangsmatrix R (wähle eine Komponente und flippe mit W'keit 0.5). Diese soll nun in eine Übergangsmatrix transformiert werden, so dass die Gleichgewichtsverteilung erhalten bleibt.
Also nehmen wir die alte Übergangsmatrix und verändern nichts, wenn das Flippen einer Komponente zu einer weiteren hardcore-Konfiguration führt ($R(x,\cdot)$ bleibt somit).
Ist dies jedoch nicht der Fall, so flippen wir die Komponente nicht (dies entspricht einem $p = 0$ in der Aufgabe 23 a). Das dies zum gewünschten Ergebnis führt, wurde ja gezeigt.

b)

Man könnte sich auch fragen, wie P aussehen müsste, wenn im Gleichgewicht hardcore-Konfigurationen mit gerade Anzahl von Einser doppelt so wahrscheinlich sein soll, wie die mit ungerade Anzahl (oder irgendein ähnliches Szenario).
Dies ist nun kein Problem mehr, da wir ja $R(x,y)$ kennen (haben wir ja berechnet) und die Quotienten $\pi(x)/\pi(y)$ offensichtlich sind (entweder 2 oder 0.5 oder 1). Und das ganz ohne Wissen darüber, wie S_0 tatsächlich aussieht!