Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung "stochastic processes"

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

8. Juni 2002

Aufgabe 25
a)

Der erste Sprung ist X_1 mit $X_i \sim Exp(\alpha)$ verteilt. Der zweite ist $\min(X_1, X_2)$ verteilt usw.
Wie ist das Minimum der unabhängigen X_i verteilt?

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) > t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\alpha t} = e^{-\alpha n t}.$$

Die jump-rates sind also αn: ($q_n = \alpha n(1 - \pi(x,x)) = \alpha n$). der $n-te$ Sprung findet nach einer $Exp(\alpha n)$ verteilten Wartezeit statt.

b)

Wurde eigentlich mit der a) schon beantwortet.
Denn $T_n - T_{n-1}$ war ja $\exp(\alpha n)$ verteilt ($T_1 \sim \exp(\alpha)$). Und daher ist wegen $T_n = (T_n - T_{n-1}) + \cdots + (T_2 - T_1) + T_1$ die Behauptung gezeigt.

c)

Sehen wir uns das Maximum von n Sprünge an: wie ist dann die Wartezeit auf den "kleinsten" dieser n Sprünge verteilt? Der erste ist natürlich das Minimum von n Exponential-α verteilten Sprüngen. Der zweite ist das Minimum von $n-1$ solcher, usw. Und diese Verteilungen hatten wir schon in der b): wie haben wieder die Summe der W_j nur von oben runtergezählt.

d)

$$P(T_n \leq t) = P(\max Y_i \leq t) = \prod (Y_i \leq t) = (1 - e^{-\alpha t})^n$$

Aufgabe 26
Wie wahrscheinlich ist es, bei k_1 roten und k_2 blauen Bällen, dass ein roter dazukommt? natürlich $\frac{k_1}{k_1+k_2}$.
Wie sieht das nun beim Yule-Prozess aus? Damit die "rote Famillie" vor der blauen anwächst, muss mind. eine der k_1 $Exp(1)$ verteilten ZV's kleiner ausfallen, als alle der k_2 vielen ZV's der "blauen Famillie". Wir suchen also die Wkeit, dass das Minimum von k_1 exp.-1 verteilten ZVs kleiner ist als das Minimum von k_2 exp.-1 verteilten ZV's; also $P(Exp(k_1) < Exp(k_2))$. Da wir den Yule-Prozess immer zu den Sprungzeiten betrachten, bekommen wir auch keine Probleme mit der Zeit. Die

Dichte einer $exp - k_2$ Verteilung ist $k_2 e^{-k_2} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ und somit haben wir

$$\begin{aligned} P(Exp(k_1) < Exp(k_2)) &= \int_0^\infty (1 - e^{-k_1 x}) k_2 e^{-k_2 x} dx \\ &= \int_0^\infty k_2 \left(e^{-k_2 x} - e^{-(k_1+k_2)x} dx \right) \\ &= k_2 \left(\left| -\frac{e^{-k_2 x}}{k_2} + \frac{e^{-(k_1+k_2)x}}{k_1 + k_2} \right|_0^\infty \right) \\ &= 1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} \\ &= \frac{k_1}{k_1 + k_2} \end{aligned}$$

b)
Sehen wir uns ersteinmal an wie es aussieht, wenn $k_1 = 1$ ist; dies entspricht einem Yule-Prozess wir in der Aufgabe zuvor. Wir hatten schon $P(Z_t > n) = (1 - e^{-t})^n$. Diese Wkeit geht natürlich gegen Eins, wenn $t \to \infty$. Skalieren wir einmal mit $\frac{1}{e^t}$, dan bekommen wir

$$P(Z_t > e^t n) = (1 - e^{-t})^{e^t n} \to e^{-n}$$

für $t \to \infty$. Also handelt es sich asymptotisch um eine $Exp(1)$ Verteilung.
Starten wir nun mit k_1 Individuen, so ist das dasselbe, als ob wir k_1 unabhängige Yule-Prozesse mit einem Anfangsindividuum betrachten. Somit ist Z_t dann $k_1 Exp(1)$ verteilt, was wir schon hatten! Dies ist nämlich eine Gamma(k_1)-Verteilung. Da wir nun jedoch nicht allgemein die Zeit t, sondern bestimmte Zeitpunkte J_n betrachten, müssen wir noch sicherstellen, dass die Reihe J_n nicht in endlicher Zeit explodiert (sonst funktioniert die Limesbildung nicht, die nach $P(Z_t > e^t n) = 1/e$ führt). (da die Summe der Erwartungswerte divergiert ist der Tausch $t \leftrightarrow J_n$ OK)
Wir haben jetzt zwar nur das Verhalten von Z_t / e^t betrachtet, das macht jedoch nichts, da

$$\frac{\frac{Z_t^{(1)}}{e^t}}{\frac{Z_t^{(1)}}{e^t} + \frac{Z_t^{(2)}}{e^t}} = \frac{Z_t^{(1)}}{Z_t^{(1)} + Z_t^{(2)}} \sim \frac{X_1}{X_1 + X_2}.$$

Aufgabe 27 Das einfachste Bild der Dynamik ist wohl folendes: Gegeben ist eine diskrete Markovkette Y_n, die der Dynamik Π genügt. Die gesuchte Dynamik beschreibt nun, wie wahrscheinlich ist es, startend von einem Punk x nach der Zeit t im Punkt Y_{N_t} ist. Dabei ist N_t Poisson(αt) verteilt.
Wir wählen also einen Punkt x aus, wählen Poissonverteilt einen Punkt aus der Markovkette Y_n und die Dynamik sagt uns, wie wahrscheinlich es ist, in Zeit t dorthin zu gelangen:

$$P_x[X_t = y] = P_x(Y_{N_t} = y).$$

Um die Q-Matrix zu finden, sehen wir uns $dP_x[X_t = y]/dt$ an der Stelle $t = 0$ an:

$$\begin{aligned} \frac{dP_x[X_t = y]}{dt} &= \sum_{n=0}^{\infty} -\alpha e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \Pi^n(x,y) + e^{-\alpha t} n (\alpha t)^{n-1} / n! \Pi^n(x,y) \\ \text{mit t=0} &= \underbrace{-\alpha \Pi^0(x,y)}_{n=0} + \underbrace{\alpha \Pi(x,y)}_{n=1} \end{aligned}$$

Poissonscher Zählprozess: Setze $P(x, x+1) = 1$ Ersetze X_t durch N_t und Π durch P. Q-matrix mit 2 Diagonalen (einfach oben Π durch P ersetzen) mit $Q(x,x) = -\alpha, Q(x, x+1) = \alpha$.

Aufgabe 28

a)

Gesucht ist das minimum von $\binom{k}{2}$ unabhängigen Exp(1)-verteilten ZVs. Dieses Minimum ist Exp($\binom{k}{2}$)-verteilt. Die erwartete Wartezeit bis zur vollständigen Verschmelzung ist dann:

$$\sum_{i=k}^{2} \mathbb{E}(Exp(\binom{i}{2})) = \sum_{i=2}^{k} \frac{2}{i(i-1)} = 2 - \frac{2}{k}.$$

Sie ist also selbst bei $k \to \infty$ endlich,

b)

Die Situation ist ähnlich wie in K2 (dort war $Q(n, n-1) = n^2$). Die Markovkette kommt aus dem unendlichen und erreicht in endlicher Zeit die Eins und bleibt dort. Die Markovkette sieht so aus:

$$X_t := \begin{cases} \infty & t = 0, \\ n & \sum_{k=n+1}^{\infty} W_k \leq t < \sum_{k=n}^{\infty} W_k, \\ 1 & \sum_{k=2}^{\infty} W_k \leq t \end{cases}$$

Dabei sind die W_k Exp($\binom{k}{2}$)-verteilte ZVs.