# Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
*thomas@7t7.de*

23. Juni 2002

**Aufgabe 33**

**Aufgabe 34**
a)
Wähle $X_n = \pm 1$ mit Wkeit von je $\frac{1}{2}$. Dann ist $\mathbb{E}(X_n) = 0 = \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) \neq X_n$.

b)
Seien $Y_n$ unabhängig mit $P(Y_n = -1) = \frac{n^2}{n^2+1}$ und $P(Y_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$. Definiere $X_n := \sum_{i=1}^n Y_i$. Dann ist zum einen $\mathbb{E}(X_n) = \sum \mathbb{E}(Y_i) = 0$, zum anderen ist $(X_n)$ ein Martingal, denn $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1}|X_n] = \mathbb{E}[X_n|X_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}|X_n] = X_n + 0$.
Nach dem Lemma von Borel-Cantelli gilt

$$P(\exists N \in \mathbb{N} \forall n > N : Y_n = -1) = 1.$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
& P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N+n}(X_1 + \cdots + X_N + \cdots + X_{N+n}) = -\infty) \\
= \;& P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N+n}(X_1 + \cdots + X_N) + \frac{1}{N+n}((X_N - 1) + \cdots + (X_N - n)) = -\infty) \\
= \;& P(\exists N : \lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + \cdots + X_N}{N+n} + \frac{nX_n}{N+n} - \frac{n(n+1)}{2(N+n)} = -\infty) \\
= \;& 1
\end{aligned}$$

**Aufgabe 35**
a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{n+1}|F_n] &= \mathbb{E}[X_{n+1} - B_{n+1}|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{E}[X_i - X_{i-1}|F_{i-1}]|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1} - \mathbb{E}[X_{n+1} - X_n|F_n] - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i - X_{i-1}|F_{i-1}]|F_n] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1}|F_n] - \mathbb{E}[X_{n+1}|F_n] + \mathbb{E}[X_n|F_n] - \mathbb{E}[B_n|F_n] \\
&= X_n - B_n = M_n
\end{aligned}$$

b)
$B_n$ ist genau dann previsible wenn $B_n$ $F_{n-1}$ adaptiert ist; also wenn die Ereignisse von $B_n$ in die $\sigma$-Algebra $F_{n-1}$ fällt.
Da $D_n := \mathbb{E}[X_n - X_{n-1}|F_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|F_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1}|F_{n-1}]$ ist $D_n$ $F_{n-1}$ adaptiert und somit previsible (der Erwartungswert ?????).
Dann ist $B_n := \sum_{i=1}^n D_i$ somit $\cup_{i=0}^{n-1} F_i$ adaptiert. Und da die $F_i$ eine Filtration darstellen, ist $B_n$ also $F_{n-1}$ adaptiert.

c)
Sei $X_n = M_n + B_n = M'_n + B'_n$.
$M_n = X_n - B_n = M'_n + B'_n - B_n$ ist ein Martingal. Wegen $B_0 = B'_0$ ist $M_0 = M'_0$.
Also

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M'_{n+1} + B'_{n+1} - B_{n+1}|F_n] &= M_n \\
\Leftrightarrow M'_n + B'_{n+1} - B_{n+1} &= M_n \text{ da } M_n \text{ Martingal und } B, B' \text{ previsible} \\
\Leftrightarrow M'_n + B'_{n+1} &= M_n + B_{n+1}
\end{aligned}$$

Sei nun $M_n = M'_n$. Dann ist wegen der letzten Zeile auch $B_{n+1} = B'_{n+1}$. Dann ist aber wiederum $M_{n+1} = M'_{n+1}$.

**Aufgabe 36**
a)
Der entscheidende Schritt ist: $\mathbb{E}(X_m Y_{m-1}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[X_m Y_{m-1}|\mathcal{F}_{m-1}]) = \mathbb{E}(Y_{m-1}\mathbb{E}[X_m|\mathcal{F}_{m-1}]) = \mathbb{E}(Y_{m-1}X_{m-1})$.
Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{n} \mathbb{E}[(X_m - X_{m-1})(Y_m - Y_{m-1})] = \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}(X_m Y_m) + \mathbb{E}(X_{m-1}Y_{m-1}) \\
&-\mathbb{E}(X_m Y_{m-1}) - \mathbb{E}(X_{m-1}Y_m) \\
= \;& \sum_{n=1}^{m} \mathbb{E}(X_m Y_m) + \mathbb{E}(X_{m-1}Y_{m-1}) - 2\mathbb{E}(X_{m-1}Y_{m-1}) \\
= \;& \mathbb{E}(X_n Y_n) - \mathbb{E}(X_0 Y_0)
\end{aligned}$$

b)
Die Zerlegung sieht aus wie bei Aufgabe 35. Nur mit $X_n^2$ statt $X_n$. Dabei lässt sich die a) natürlich nutzen, da mit $X := Y$ gilt

$$\mathbb{E}(X_m - X_{m-1})^2 = \mathbb{E}(X_m)^2 - 2\mathbb{E}(X_m X_{m-1}) + \mathbb{E}(X_{m-1})^2 = \mathbb{E}(X_m^2 - X_{m-1}^2).$$

Dadurch wird $B_n = \mathbb{E}X_n^2 - \mathbb{E}X_0^2$,