Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “stochastic processes“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

29. Juni 2002

Aufgabe 37

a)
Es ist ein Martingal, da

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M_{n+1}|S_n = a) &= \mathbb{E}(S_{n+1}^2|S_n = a) - n - 1 \\ &= \frac{1}{2}((a+1)^2 + (a-1)^2) - n - 1 = a^2 - n \\ &= M_n\end{aligned}$$

Das stopping-theorem sagt für Martingale, dass $X_S = \mathbb{E}(X_T|F_S)$ für $S \leq T$. Mit nun $S = 0$ ergibt sich wegen $S_0 = 0$ und p_a aus dem Ruinproblem

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_T^2 - T) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}(S_T^2) = \mathbb{E}(T) \Leftrightarrow p_a\mathbb{E}(S_{T_a}^2|T = a) + p_b\mathbb{E}(S_{T_b}^2|T = b) = \mathbb{E}(T) \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{b}{|a|+b}a^2 + \frac{|a|}{|a|+b}b^2 = \mathbb{E}(T) \Leftrightarrow \mathbb{E}(T) = \frac{b|a|}{|a|+b}\end{aligned}$$

b)
Erst wird c bestimmt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(cS_{n+1}|S_n = a) = \exp(ca) \quad &\Leftrightarrow \quad pe^{c(a+1)} + (1-p)e^{c(a-1)} = e^{ca} \\ &\Leftrightarrow \quad pe^c + (1-p)e^{-c} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad px + (1-p)/x = 1 \text{ mit } c = \log x \\ &\Leftrightarrow \quad px^2 - x + (1-p) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \frac{1-p}{p}\} \\ &\Rightarrow \quad c = \log\left(\frac{1-p}{p}\right) = \frac{q}{p}\end{aligned}$$

Dann selbe Methode wie bei der a):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\exp(cS_T)) = \exp(0) \quad &\Leftrightarrow \quad p_a e^{ca} + (1-p_a)e^{cb} = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad p_a = \frac{1-e^{cb}}{e^{ca} - e^{cb}} \\ &\Leftrightarrow \quad p_a = \frac{1-(q/p)^b}{(q/p)^a - (q/p)^b} \\ &\Leftrightarrow \quad p_a = x^{|a|}\frac{1-x^b}{1-x^{|a|+b}} \text{ mit } x := q/p \\ &\Leftrightarrow \quad p_a = \frac{1-y^b}{1-y^{|a|+b}} \text{ mit } y := p/q\end{aligned}$$

Aufgabe 38
a)
Martingalbedingung ausnutzen:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = a) = a \Leftrightarrow \mathbb{E}(S_{n+1}(1+r)^{-(n+1)}|S_n(1+r)^{n-n} = a) = a \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbb{E}(S_{n+1}|S_n = a(1+r)^n) = a(1+r)^{n+1} \\ \Leftrightarrow \quad & pa(u-d) + da = a(1+r) \Leftrightarrow p^* := p = \frac{1+r-d}{u-d} \end{aligned}$$

Da $p \in (0,1)$ gilt $d-1 < r < u-1$.
b)
Sei $M_n(u)$ bzw. $M_n(d)$ der Zustand wenn es von M_n aufwärts bzw. abwärts gegangen ist. Da M_n und X_n Martingale sind, gilt

$$p^* M_n(u) + (1-p^*)M_n(d) = 0 \text{ bzw. } p^* X_n(u) + (1-p^*)X_n(d) = 0.$$

Das Gleichungssystem hat eine Lösung der Form $M_n = \alpha_{n-1}X_n$. Mit $\zeta_n := \alpha_{n-1}$ ist dies schonmal der previsible Prozess. Setzen wir noch $M_0 := 0$, dann sind wir wegen $\sum_{i=1}^n (M_i - M_{i-1}) = M_n$ fertig,

Aufgabe 39
a)
Wegen Borel-Cantelli reicht es aus zu zeigen, dass $\sum_{n=1}^\infty P(\sup_{0\le s\le 1} |W_{n+s} - W_n| > n^\varepsilon) < \infty$ ist.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty P(\sup_{0\le s\le 1} |W_{n+s} - W_n| > n^\varepsilon) &= \sum_{n=1}^\infty P(\sup_{0\le s\le 1} |W_s - W_0| > n^\varepsilon) \\ &= \sum_{n=1}^\infty P(\sup_{0\le s\le 1} |W_s| > n^\varepsilon) \le 2\sum_{n=1}^\infty P(\sup_{0\le s\le 1} W_s > n^\varepsilon) \\ &= 2\sum_{n=1}^\infty 2P(W_1 > n^\varepsilon) \end{aligned}$$

Informell geschrieben ist das nun $4\sum_{n=1}^\infty P(\mathcal{N}(0,1) < n^\varepsilon) < \infty$.
b)

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} W_t &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{n=1}^t W_{\frac{n}{t}} - W_{\frac{n-1}{t}} \\ &\sim \frac{1}{t} \lim_{t\to\infty} \sum_{n=1}^t V_{\frac{1}{t}} \text{ mit } V \sim \mathcal{N}(0, 1/t) \\ &= \mathbb{E}(V_1) = 0 \text{ nach dem sGGZ} \end{aligned}$$

Oder: $1/tW_t \sim 1/t\mathcal{N}(0,t) \sim \mathcal{N}(0,1/t) \to \mathcal{N}(0,0) = 0$ a.s.
c)
$W(0) = 0$: beide, da $X(0) = \sqrt{\sigma}^{-1} W(0) = 0$ und $Y_0 := 0$. Im weiteren sei $\sigma^{-0.5} =: s$.
$W(t+h) - W(t) \sim \mathcal{N}(0,h)$: Für X :

$$sW(\sigma(t+h)) - sW(\sigma t) \sim s(W(\sigma t + \sigma h) - W(\sigma t)) \sim sW(\sigma h) \sim \mathcal{N}(0,h)$$

Für Y:

$$\begin{aligned} Y_{t+h} - Y_t &= (t+h)W_{1/(t+h)} - hW_{(1/h)} \sim tW_{(1/t+h)} + h(W_{1/(t+h)} - W_{1/h}) \\ &= \underbrace{tW_{\frac{1}{t+h}}}_{\mathcal{N}(0,\frac{t^2}{t+h})} - \underbrace{hW_{\frac{t}{ht+h^2}}}_{\mathcal{N}(0,\frac{h^2 t}{ht+h^2})} \end{aligned}$$

Da die beiden Summanden unabhängig sind, denn $1/h > 1/(t+h) > 0$ und die dritte Eigenschaft wird auch für Y gelten.

$W(t_2) - W(t_1), W(t_1) - W(t_0)$ sind unabhängig.
Für X :
$(X_{t_2} - X_{t_1}), (X_{t_1} - X_{t_0})$ entspricht $s(W_{\sigma t_2} - W_{\sigma t_1}), s(W_{\sigma t_1} - W_{\sigma t_0})$ und die sind unabhängig, da dies für $\sigma t_2 > \sigma t_1 > \sigma t_0$ und W ja gilt.

Für Y:
z.z.: $t_2(W_{1/t_2} - t_1 W_{1/t_1}), t_1(W_{1/t_1} - t_0 W_{1/t_0})$ sind unabhängig. Da Multiplikationen mit Konstanten nichts an der Unabhängigkeit ändern, können diese weggelassen werden. Dann reicht es aus zu zeigen, dass $-(W_{1/t_0} - W_{1/t_1}), -(W_{1/t_1} - W_{1/t_2})$ unabh. sind. Das trifft zu, da $1/t_0 > 1/t_1 > 1/t_2$.

Aufgabe 40