Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “Statistik“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

30. Oktober 2001

Aufgabe 1 Wir wollen herausfinden, ob Frauen bei der Beförderung (nur von Männern??) benachteiligt werden. Dazu überprüfen wir, wie wahrscheinlich die beobachtete Situation ist, wenn keinerlei Präferenzen vorliegen würden:
Wie wahrscheinlich ist es aus einer Urne mit 24 weissen (weiblich) und 24 schwarzen (männlich) Kugeln bei 13 Zügen ohne zurücklegen nur 3 oder weniger schwarze zu ziehen? (Also das Männer derart weniger abgelegt werden als Frauen.[1])

$$\mathbb{E} = 13\frac{24}{48} = 6.5 \qquad \sum_{k=0}^{3} \frac{\binom{24}{k}\binom{24}{13-k}}{\binom{48}{13}} \approx 0.0245$$

Wollen wir den Test beidseitig durchführen, addieren wir noch die zu 6.4 symmetrische Wahrscheinlichkeit

$$\sum_{k=10}^{1} 3\frac{\binom{24}{k}\binom{24}{13-k}}{\binom{48}{13}} \approx 0.0245$$

Zusammen ergibt sich dann ein p-Wert von 0.04899[2]. Je nachdem welche Signifikanzgrenze man annimmt, kann man sich für oder gegen tendenzielle Benachteiligung von Frauen entscheiden.

Zum einen stellt sich die Frage, ob dies wirklich die richtige Vorgehensweise ist, tendenzielle Benachteiligungen auszumachen. Zum anderen könnte es auch andere Einflussfaktoren geben (Inhalt des Lehrgangs oder besondere Vorkommnisse, etc.).

Aufgabe 2 Wie in der vorhergehenden Aufgabe können wir die Wahrscheinlichkeit ausrechnen:
In Erwartung müssten $6\frac{9}{16} = 3.375$ Straftäter eine Brille tragen.
$P(\text{Aus } 9+7 \text{ Personen werden 6 gezogen und} \leq 1 \text{ sind Straftäter}) = 0.0245$.
$P(\text{Aus } 9+7 \text{ Personen werden 6 gezogen und} > 5 \text{ davon sind Straftäter}) = 0.01049$.
Bei einem beidseitigen Test[3] ergibt sich eine W'keit von 0.03497. je nach Signifikanzlevel kann man nun seine Entscheidung fällen. Bei gewählten 5% war es kein Zufall.

Es gibt mehere Faktoren, die noch angegeben sein sollten:

- Sind die Straftaten unabhängig von der Sehschwäche?
- Ist die Kontrollgruppe wirklich vergleichbar? (selbe soziale Klasse, gleicher Wohnort, etc.)
- Gab es besondere Gründe, wieso keine Brille getragen wurde?

Aufgabe 3 Vorbemerkt sei, dass die Tage nicht einfach zusammengefasst werden dürfen, da wesentliche Temperaturunterschiede das Verhalten der Babies beeinflussen. Letzendlich interessiert uns, ob die Gesamtzahl an nicht-schrei-Tagen des Kontrollbabies signifikant vom erwarteten Wert abweicht.
Am ersten Tag haben wir 9 Babies, von denen 4 nicht schreien. Wie wahrscheinlich ist es, dass, wenn wir eines davon ziehen, dieses nicht zu den schreienden gehört?

$$dhyper(1,4,5,1) = 0.44 \text{ oder einfach pro Tag } \frac{\text{Gesamtzahl Nicht-Schreier}}{\text{Gesamtzahl der Babies}}$$

[1] Man kann natürlich auch ausrechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass nur 14 oder weniger Frauen befördert werden, was aus Symmetriegründen genau dasselbe ist.
[2] da wir nur auf Benachteiligung testen, reicht eigentlich der einseitige Test
[3] dieser macht nun Sinn, da eine allgemeine Abhängigkeit getestet wird

Machen wir das für jeden Tag ergibt sich der Wahrscheinlichkeitsvektor (oder Liste, Völlig egal)

$$p \leftarrow c(4/9, 3/7, 1/3, 1/7, 5/6, \dots 8/9, 4/7, 2/3).$$

Unsere Nullhypothese ist, dass das Schaukeln keine Auswirkungen hat.
Der Erwartungswert ist $\mathbb{E} = \sum_{i=1}^{18} p[i]$. Wir untersuchen also bei einem einseitigen Test (würde ich hier bevorzugen) die Gesamtzahl der Tage des nicht-schreienden Experimentalbabies: $P(T \geq 15)$. Bei einem beidseitigem Test kommt noch $P(T \leq 8)$ hinzu.
Hier seien nun drei Lösungsmöglichkeiten:

Mittelwert

Wir mitteln einfach die Wahrscheinlichkeit über alle Tage (werfen diese also trotz des Vorbehalts zusammen) ($\frac{1}{18} \sum_{1}^{18} p[i] = \frac{3613}{5670}$), dann handelt es sich nurnoch um ein Bernoulli-Experiment:

$$\sum_{k=15}^{18} \binom{18}{k} \frac{3613}{5670}^k \frac{2057}{5670}^{18-k} \approx 0.06343 \text{ bzw. } \sum_{k=0}^{8} \cdots \approx 0.075.$$

Je nach Vorgehensweise kann man sich hier für verwerfen oder behalten entscheiden. Da die Streuung der Stichprobe jedoch mit $S^2 = 0.044$ hier zu 'recht hohenSSchwankungen führen kann. Die Größenordnung bleibt, wie wir gleich sehen werden, jedoch erhalten.

Permutation

Dazu brauchen wir einen Computer.
Mit der Zufallsvariable $X := (X_1, X_2, \dots, X_{18}), X_i \sim U[0,1]$ wird nun getestet, an wie vielen Tagen das Experimentalbaby nicht geschrien hat $= \#\{i : X_i \leq p[i]\}$.
Bei 10 Millionen Tests ergab sich eine Wahrscheinlichkeit

$$P(T \geq 15) \approx 0.04485 \text{ bzw. } P(T \leq 8) \approx 0.0559.$$

Ausrechnen

Man kann die Wahrscheinlichkeit auch explizit ausrechnen. Da ich jedoch kein Programm dazu geschrieben habe, verlass ich mich auf das Ergebnis von Margret Knape, welches

$$P(T \geq 15) = 0.04485\dots$$

ausgibt.

Die Computersimulation hat, im Gegensatz zur Rechnung mit dem Mittelwert, zu einem sehr akkuratem Ergebnis geführt.

Aufgabe 4 Wir benutzen bei beiden Teilaufgaben, dass für $n \to \infty$ die experimentelle Verteilung gegen die tatsächliche konvergiert.
Dummerweise gibt es mindestens viele Möglichkeiten, was genau die whiskers sein sollen. Ein H-spread $= h = F^{-1}(3/4) - F^{-1}(1/4)$ ist fest definiert, genau wie der Median $F^{-1}(1/2)$. In dieser Aufgabe sind die whiskers $M \pm 2h$

a)

Der Median der StandardNormalVerteilung ist natürlich Null. Ein Viertel der Masse im positiven Bereich wird bei

$$R := qnorm(3/4) = 0.6744898 = \frac{h}{2}$$

erreicht.
Somit sind rechte und linke whisker $RW := R + 1.5h = 4h = 2.6979598 = -LW$. Wir wollen nun wissen, wieviele std-Norm.vert. ZVs wir realisieren müssen, damit mind. eine mit Wkeit ≥ 0.5 ausserhalb der whiskers liegt:

$$\begin{aligned}
(P(X \geq RW) + P(X \leq LW))^n &\geq 0.5 \\
\Leftrightarrow 1 - P(LW < X < RW)^n < 0.5 & \\
\Leftrightarrow \log(0.5) &< n \log\left(P(X < RW) - P(X < RW)\right) \\
\Leftrightarrow \log(0.5) &< n \log(pnorm(RW) - pnorm(LW) \\
\Leftrightarrow \frac{\log(0.5)}{\log(0.9930234)} = 99.006 &< n.
\end{aligned}$$

Also muss n mindestens 100 sein.

b)
Dasselbe machen wir nun bei der $exp(1)$-Verteilung. Mit $F(x) = \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}$ als Verteilungsfunktion bekommen wir das linke Boxende $L = 0.2877$ und das rechte $R = 1.3863$. Somit ist $h = 1.0986$ und das linke whisker-ende liegt somit im negativen. Der rechte whisker ist $R + 1.5h = 3.0342$. Jetzt noch nachrechnen:

$$\begin{aligned}
1 - P(X < 3.034)^n &\geq 0.5 \\
\Leftrightarrow (1 - e^{-3.034})^n &\leq 0.5 \\
\Leftrightarrow n &\geq \frac{\log(0.5)}{\log(0.951877)} = 14.054
\end{aligned}$$

Also reichen dazu 14 Realisierungen, was natürlich sehr vage ist, da die zugrundeliegende Konvergenz ja nur für große n gute Werte liefert.