Lösungsvorschläge für die Übungsaufgaben der Vorlesung “Statistik“

Thomas Rupp
thomas@7t7.de

2. Februar 2002

Aufgabe 37
i)
$g_\vartheta(X_i) = \alpha e^{-\alpha x_i}$. Also ist $f_\vartheta = \alpha^n e^{-\alpha \sum_{i=1}^n x_i}$.
Gesucht ist nun dessen (bzw. des Logarithmusses) Maximum in α:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\alpha}(n \log\alpha - \alpha \sum_{i=1}^n x_i) \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^n x_i \\ \Leftrightarrow \alpha &= \bar{x}^{-1} \\ \Leftrightarrow \tau &= \bar{x} = S_n \end{aligned}$$

ii)
$S_n = \sum \frac{X_i}{n}$ und jedes $\frac{X_i}{n}$ ist $Exp(n\alpha)$ verteilt. Dann ist S_n Gamma$(n, n\alpha)$ verteilt. Damit folgt wiederum, dass $\frac{S_n}{\tau} = \alpha S_n$ somit Gamma(n, n) verteilt ist.
iii)

$$\begin{aligned} & P(\underbrace{\texttt{qgamma}(\beta/2, n, 1/n)}_{=:a} \leq \tfrac{S_n}{\tau} < \underbrace{\texttt{qgamma}(1-\beta/2, n, 1/n)}_{=:b}) = 1-\beta \\ \Leftrightarrow \quad & P(\tfrac{S_n}{b} \leq \tau < \tfrac{S_n}{a}) = 1-\beta. \end{aligned}$$

b)

$$P(0.4795 \leq 1.6062\alpha < 1.708) = 0.95 \Rightarrow KI = [0.2985, 1.063],$$

da qgamma$(0.025, 10, 0.1) = 0.4795$ und qgamma$(0.975, 10, 0.1) = 1.708$.

Aufgabe 38
a)
Das Produkt der Dichten ist $f_\vartheta(X) = (\frac{1}{\vartheta})^n 1_{[X(n) \leq \vartheta]}$, dabei setzen wir natütlich $X(n) := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Nach dem Faktorisierungssatz ist $X(n)$ suffizient. Oder man sieht es dadurch, dass uniform verteilte ZVs, gegeben ihr Maximum, immernoch uniform verteilt sind (also nicht von der (oberen) Schranke abhängen.
Es gilt $P[X(n) \leq t] = (P(X_1 \leq t))^n = (t/\vartheta)^n$. Also ist die dazugehörige Dichte $m(t, \vartheta) = n\frac{t^{n-1}}{\vartheta^n} \cdot 1_{[0 \leq t \leq \vartheta]}$.
Der Schätzer $X(n)$ ist dann vollständig, wenn für alle ZVs $f(\cdot)$ aus $\mathbb{E}_\vartheta f(X(n)) = 0 \quad \forall\vartheta$ folgt, dass $\forall\vartheta \quad f(X(n)) = 0$ f.s. ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\vartheta f(X(n)) &= \frac{n}{\vartheta^n}\int_0^\vartheta f(t)t^{n-1}dt = g(\vartheta)\frac{n}{\vartheta^n} = 0 \quad \forall\vartheta \\ \Rightarrow \frac{\partial \mathbb{E}_\vartheta}{\vartheta} &= 0 = g'(\vartheta)\frac{n}{\vartheta^n} - \frac{n^2}{\vartheta^{n-1}}g(\vartheta) \end{aligned}$$

Weil aus der ersten Zeile aber auch folgt, dass $g(\vartheta) = 0$ ist, ist auch $g'(\vartheta) = 0 = f(X(n))\vartheta^{n-1}$; also ist $f(X(n)) = 0 \forall\vartheta$ und somit ist der ML-Schätzer der wirksamste.
b)

$\bar{X}/2$ ist erwartungstreu, da

$$\mathbb{E}(2\bar{X}) = \frac{2}{n}\sum \mathbb{E}X = \frac{2}{n}n\mathbb{E}X_1 = \vartheta.$$

$X(n)$ ist nicht erwartungstreu. Dies kann jedoch durch eine Korrektur erreicht werden:

$$\mathbb{E}(X(n)) = \int_0^\vartheta t\frac{n}{\vartheta^n}t^{n-1}dt = \frac{n\vartheta}{n+1}.$$

Also ist $h(X(n)) = \frac{n+1}{n}X(n)$ erwartungstreu. Nach dem Satz von Lehmann-Scheffé ist somit $X(n)$ der wirksamste Schätzer.

Aufgabe 39 Die Wahrscheinlichkeitsgewichte haben die Form

$$g_\alpha(x) = \alpha^x e^{-\alpha}\frac{1}{x!} = \underbrace{e^{-\alpha}}_{K(\alpha)}\exp(\underbrace{-\log x!}_{\alpha(x)} + \underbrace{\log\alpha}_{c(\alpha)}\underbrace{x}_{V(x)}).$$

Dann ist (Satz) $V(X_1,\dots,X_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ suffizient und vollständig, wenn die Menge $\{\log\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ einen offenen Quader in $\mathbb{R}$ (also ein Intervall) umfasst. Da die Menge ganz $\mathbb{R}$ ist, umfasst sie jedes Intervall in $\mathbb{R}$.
Die Rao-Blackwellisierung eines erwartungstreuen Schätzers mit einer suffizienten und vollständigen Statikstik liefert den wirksamsten Schätzer (das ist ja grade der Satz von Lehmann-Scheffé. Die Statistik haben wir jetzt und ein erwartungstreuer Schätzer ist

$$S = X_1X_2X_3 \text{ da } \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1^3) = (\mathbb{E}X)^3 = \alpha^3.$$

Die Rao-Blackwellisierung liefert $\mathbb{E}[X_1X_2X_3|\sum_{i=1}^n X_i]$ als wirksamsten Schätzer.

Aufgabe 40 Zu zeigen ist, dass für alle ZVn $\varphi(V(X))$ folgendes gilt:

$$\forall c : \mathbb{E}_c(\varphi(V(x)) = 0 \Rightarrow \varphi(V(x)) = 0\forall c.$$

Dies ist in der Tat so, da

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_c\varphi(V(x)) &= \sum_{x\in B}\varphi(V(x))K(c)A(x)e^{cV(x)} = 0\forall c \\
&\Leftrightarrow K(c)\sum_{v\in V(B)}\underbrace{\varphi(v)A(V^{-1}(v))}_{=:\psi(v)}e^{cv} = 0\forall c \\
&\Leftrightarrow \sum_{v\in V(B)}\psi(v)e^{cv} = 0\forall c
\end{aligned}$$

Dabei ist O.B.d.A. die Funktion $V()$ injektiv, da ansonsten alle Vielfachheiten in $\psi()$ zusammengefasst werden können.
Der Erwartungswert kann nun als Funktion in c aufgefasst werden. Da dieser immer Null ist, müssen auch alle Ableitungen Null sein. Dies kann in folgender Matrix dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_b \\ v_1^2 & v_2^2 & \cdots & v_b^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1^{b-1} & v_2^{b-1} & \cdots & v_b^{b-1} \end{pmatrix} (\psi(v_1)e^{cv_1} + \cdots + \psi(v_b)e^{cv_b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dabei ist $b := |B|$. Wenn man sich jetzt noch daran erinnert, dass die Matrix eine Vandermande-Matrix ist und diese (da alle v_i paarweische verschieden sind) vollen Rang hat, hat das LGS nur die triviale Lösung. Da aber nun die Exponentialfunktion strikt positiv ist, muss $\psi()$ Null sein (für alle $v \in B$), und da $A()$ ebenfalls strikt positiv ist, muss $\varphi()$ Null sein.