

## Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Montag, 5. November 01, in der Vorlesung

**Aufgabe 5 :** (Bsp. 155 aus “Small data sets” (herausgegeben von D.J. Hand u.a., Chapman u. Hall 1994))

*The origins of the Etruscan empire remain something of a mystery to anthropologists. A particular question is whether Etruscans were native Italians or immigrants from elsewhere. In an anthropometric study, observations on the maximum head breadth (measured in mm) were taken on 84 skulls of Etruscan males. These data were compared with the same skull dimension for a sample of 70 modern Italian males.*

Etruscan skulls				Italian skulls			
141	148	132	138	133	138	130	138
154	142	150	146	134	127	128	138
155	158	150	140	136	131	126	120
147	148	144	150	124	132	132	125
149	145	149	158	139	127	133	136
143	141	144	144	121	131	125	130
126	140	144	142	129	125	136	131
141	140	145	135	132	127	129	132
147	146	141	136	116	134	125	128
140	146	142	137	139	132	130	132
148	154	137	139	128	139	135	133
143	140	131	143	128	130	130	143
141	149	148	135	144	137	140	136
148	152	143	144	135	126	139	131
141	143	147	146	133	138	133	137
150	132	142	142	140	130	137	134
143	153	149	146	130	148	135	138
149	138	142	149	135	138		
142	137	134	144				
146	147	140	142				
140	137	152	145				

Bearbeiten Sie diese Aufgabe in ähnlichem Geist wie die Aufgabe 2!

**Aufgabe 6 :** (Aus: J.A.Rice „Mathematical Statistics and Data Analysis“, 2. Aufl., Duxbury Press, 1995) *An experiment was done to measure the effects of ozone, a component of smog. A group of 22 70-day old rats were kept in an environment containing ozone for seven days, and their weight gains were*

*recorded. Another group of 23 rats of a similar age were kept in an ozone-free environment for a similar time, and their weight gains were recorded. The data (in grams) are given below. Analyze the data to determine the effect of ozone. (This problem is from Doksum, K., and Sievers, G. (1976), Plotting with confidence. Graphical comparisons of two populations. Biometrika, 63, 421 - 434, who provide an interesting analysis.)*

Controls			Ozone		
41.0	38.4	24.9	10.2	6.1	20.4
25.9	21.9	18.3	7.3	14.3	15.5
13.1	27.3	28.5	-9.9	6.8	28.2
-16.9	17.4	21.8	17.9	-12.9	14.0
15.4	27.4	19.2	6.6	12.1	15.7
22.4	17.7	26.0	39.9	-15.9	54.6
29.4	21.4	22.7	-14.7	44.1	-9.0
26.0	26.6		-9.0		

**Aufgabe 7 :** a)  $\nu$  sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{R}$ . Zeigen Sie:

$$\tilde{\mu} \text{ ist Median von } \nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mu} \text{ ist Minimalstelle der Abbildung } g : x \mapsto \int |x - z| \nu(dz)$$

b)  $X$  sei eine reellwertige Zufallsvariable;  $\mu$  und  $\sigma$  seien Erwartungswert und Standardabweichung, und  $\tilde{\mu}$  sei ein Median der Verteilung von  $X$ . Weisen Sie die folgende, auf Hotelling und Solomons (1932) zurückgehende Ungleichung nach:

$$|\mu - \tilde{\mu}| \leq \sigma.$$

**Aufgabe 8 :**  $\nu$  sei eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\mathbb{R}$  mit Verteilungsfunktion  $F$ . Am Median  $\tilde{\mu}$  von  $\nu$  sei  $F$  differenzierbar mit strikt positiver Ableitung  $f(\tilde{\mu})$ . Zeigen Sie:

Sind  $X_1, X_2, \dots$  unabhängig und gemäß  $\nu$  verteilt, dann ist die Folge der Stichprobenmediane  $M_n$  von  $X_1, \dots, X_n$  asymptotisch normal; genauer:

$\sqrt{n}(M_n - \tilde{\mu})$  konvergiert in Verteilung gegen eine zentrierte Normalverteilung mit Varianz  $1/(2f(\tilde{\mu}))^2$ .

(Der Einfachheit halber dürfen Sie sich dabei auf ungerade  $n$  beschränken; Lösungshinweise finden Sie z.B. auf den Seiten 483 und 509 des Buches “Statistical Inference” von G. Casella und R.L. Berger, 2nd ed., Duxbury 2002, und im Ordner “Materialien zur Statistik” im Lernzentrum.)