Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Montag, 03. Dezember 01, in der Vorlesung

Aufgabe 21 : Ich habe mit einer gewissen um 0 symmetrischen Verteilung (die ich Ihnen noch nicht verrate) 20 Zufallszahlen erzeugt und diese dann um ein δ (das ich Ihnen ebenfalls noch nicht verrate) verschoben. Daraus resultierten die folgenden Daten:

0.64	-2.76	2.41	2.03	-49.15	2.30	3.45	2.85
1.43	3.48	1.37	0.96	2.67	0.99	3.87	2.34
4.95	3.20	2.03	-17.02				

Finden Sie ein Konfidenzintervall für δ!

Aufgabe 22 : Jemand behauptet, die Farbe der in einem jeweils gut durchmischten Stapel von Skatkarten zuoberst liegenden Karte (aufgrund von parapsychologischen Fähigkeiten) überdurchschnittlich oft zu erraten - ja er ist sogar dreist genug zu unterstellen, daß ihm dies auf lange Sicht in mehr als 30% aller Fälle gelingt. In gesunder Skepsis ziehen Sie diese Behauptung in Zweifel und schreiben alles dem bloßen Zufall zu. Vereinbaren Sie einen Test, der sicherstellt, daß eine Fehlentscheidung sowohl in der von Ihnen vermuteten Situation als auch in dem von Ihrem Gegenüber behaupteten Szenario nur mit Wahrscheinlichkeit 0.05 erfolgt.

Aufgabe 23: Zur Debatte stehen zwei Wahrscheinlichkeitsgewichtungen f_0 und f_1 auf $B = \{1, \dots, 15\}$.

b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$100 \cdot f_1(b)$	3	7	18	15	2	5	4	2	2	10	1	1	5	20	5
$100 \cdot f_0(b)$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10

Es wird der Ausgang $b = 10$ beobachtet. Mit welchem p-Wert können Sie unter Verwendung eines Neyman-Pearson-Tests die Hypothese f_0 zugunsten der Alternative f_1 ablehnen?

Aufgabe 24: a) Zeigen Sie: Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2.$$

b) $X_1, \dots, X_n$ seien unabhängig und indentisch verteilt mit

$$\mathbf{E}X_1 := \mu,\ \mathbf{E}(X_1 - \mu)^2 := \sigma^2,\ \mathbf{E}(X_1 - \mu)^4 := m_4 < \infty.$$

Zeigen Sie:

(i) $\operatorname{var}[(X_1 - X_2)^2] = 2(m_4 + \sigma^4)$

(ii) $\operatorname{cov}[(X_1 - X_2)^2, (X_1 - X_3)^2] = m_4 - \sigma^4$

(iii) $\operatorname{var}\left[\sum_{i<j} (X_i - X_j)^2\right] = n(n-1)(m_4 + \sigma^4) + n(n-1)(n-2)(m_4 - \sigma^4)$

(Ein Tipp: Betrachten Sie erst alle diese Beziehungen für $Z_i := X_i - \mu$.)

Leiten Sie daraus die folgende Formel für die Varianz des Stichprobenmittles her:

$$\operatorname{var}\left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2)\right] = \frac{1}{n}(m_4 - \frac{n-3}{n-1}\sigma^4).$$