Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Montag, 10. Dezember 01, in der Vorlesung

Aufgabe 25 : Die nachstehenden Daten $x_1, \ldots, x_{20}$ sind Realisierungen von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{20}$, wobei $X_i = \beta e^{\sigma Z_i}$, und die Z_i unabhängig und standard-normalverteilt sind:

111	14.9	0.0387	0.183	0.0957
194	1.97	0.202	0.107	1.44
1.63	164	0.0660	1.16	0.689
0.581	0.0624	1.04	27.7	15.7

Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den Skalenparameter β an.

Aufgabe 26 : $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und $\mathcal{N}(\mu, 1)$-verteilt, $0 < \alpha < 1$.
Finden Sie den mächtigsten unter allen auf $X_1, \ldots, X_n$ basierenden Tests mit Signifikanz α für die Hypothese $\mu \leq 0$ gegen die Alternative $\mu \geq 1$, und skizzieren Sie seine Operationscharakteristik

a) für $n = 10$ und $\alpha = 0,05$

b) für $n = 100$ und $\alpha = 0,01$.

Aufgabe 27 : Begründen Sie das folgende von Fisher vorgeschlagene Verfahren, k unabhängige Tests für eine Nullhypothese H_0 zu einem zu verarbeiten:
$P_1, \ldots, P_k$ seien die p-Werte von k unabhängigen Tests für eine Nullhypothese H_0. Dann ist

$$-2(\ln P_1 + \ln P_2 + \ldots + \ln P_k)$$

eine Teststatistik, die unter H_0 $\chi^2(2k)$-verteilt ist.
(Als Starthilfe: Wie wahrscheinlich ist es unter H_0, dass der p-Wert P_1 kleiner als x ausfällt?)

Aufgabe 28 :

a) X sei eine quadratisch integrierbare Zufallsvariable mit Verteilung ν und Erwartungswert μ. Zeigen Sie: Für jede reelle Zahl c ist

$$\mathbb{E}(X - c)^2 = (\mu - c)^2 + \mathrm{Var} X$$

(In mechanischen Worten ist dies der „Steinersche Satz“: Das quadratische Moment der Verteilung ν um c ist gleich dem quadratischen Moment des (mit der Gesamtmasse 1 gewichteten) Schwerpunkts μ um c plus dem quadratischen Moment von ν um seinen Schwerpunkt μ).

b) S sei ein Schätzer für das reelle Parametermerkmal $m(\vartheta)$. Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_\vartheta(S - m(\vartheta))^2 = (\mathbb{E}_\vartheta[S] - m(\vartheta))^2 + \mathrm{Var}_\vartheta(S)$$

(In Worten: Der erwartete quadratische Fehler des Schätzers S ist gleich seiner quadrierten Verzerrung plus seiner Varianz).

c) $X_1, X_2, \ldots,$ seien unabhängig und identisch verteilt mit Verteilung π, Varianz σ^2 und zentriertem 4. Moment $m_4 < \infty$ (vgl. Aufgabe 24).

Wir betrachten den Schätzer:

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2.$$

Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_\pi \left[(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sigma^4 + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \frac{1}{n} \left(m_4 - \frac{n-3}{n-1} \sigma^4 \right).$$