

Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Montag, 17. Dezember 01, in der Vorlesung

Aufgabe 29 : Welcher der beiden Varianzschätzer

$$s^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

und

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

hat den kleineren mittleren quadratischen Fehler, wenn X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilt sind gemäß

- a) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
- b) Unif $[a, b]$
- c) $\frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$

Aufgabe 30 : Das folgende Datenmaterial wurde von K. Pearson in seiner berühmten Arbeit aus dem Jahr 1900 für die erste seiner 8 Illustrationen zum χ^2 -Test verwendet. Professor W.F.R. Weldon, Fellow of the Royal Society, hatte 26.306 mal mit 12 Würfeln gewürfelt (oder würfeln lassen?) Für $j = 1, \dots, 12$ wurde die Anzahl k_j derjenigen 26.306 Würfe vermerkt, bei denen j der 12 Würfel eine Augenzahl ≥ 5 zeigten.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_j	185	1149	3265	5475	6114	5194	3067	1331	403	105

j	10	11	12
k_j	14	4	0

Hat man Grund, an der Hypothese zu zweifeln, daß es sich um „faire Würfel“ handelt?

Aufgabe 31 : a) \mathfrak{Y} sei $\mathcal{N}(0, C)$ - verteilt auf \mathbb{R}^d mit regulärer Kovarianzmatrix C . Wie ist $\mathfrak{Y}^T C^{-1} \mathfrak{Y}$ verteilt ?

b) Wir betrachten das Modell

$$\mathfrak{X} = \bar{\mu} + \mathfrak{E},$$

wobei \mathfrak{E} zentriert normalverteilt ist auf \mathbb{R}^d mit bekannter Kovarianzmatrix C ; C sei regulär. Finden Sie einen $(1 - \alpha)$ - Konfidenzbereich $K(\mathfrak{X})$ für $\bar{\mu}$. (Tipp: Wie wär's mit einem Ellipsoid um \mathfrak{X} ?)

Aufgabe 32 : Das Geschlecht der ersten vier Kinder

Unter 36 536 Familien mit vier oder mehr Kindern war im Archiv der Genealogical Society of the Church of the Latter Day Saints die Verteilung des Geschlechts der ersten vier Kinder wie folgt:

mmmm	2574	wmmm	2340
mmmw	2469	wmmw	2258
mmwm	2401	wmwm	2276
mmww	2313	wmww	2209
mwmw	2478	wwmm	2253
mwmw	2289	wwmw	2084
mwwm	2329	wwwm	2107
mwww	2121	wwww	2035

Bezeichnen wir mit G_i das Geschlecht ($0 = m, 1 = w$) des i -ten Kindes. Prüfen Sie folgende Hypothesen:

- a) $H_a : G_1, \dots, G_4$ sind unabhängig und identisch verteilt mit $W_S \{G_i = 0\} = \frac{1}{2}$
- b) $H_b : G_1, \dots, G_4$ sind unabhängig und identisch verteilt.
- c) $H_c : G_1, \dots, G_4$ sind unabhängig.
- d) Setzen Sie sich mit folgender Behauptung auseinander: „Einige Familien produzieren eher Söhne, andere Töchter.“