Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Mo., 21. Januar 02, in der Vorlesung

Aufgabe 37 : a) $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und $\mathrm{Exp}(\alpha)$ verteilt.
(i) Finden Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer S_n für $\tau := 1/\alpha$.
(ii) Welche Verteilung hat S_n/τ?
(iii) Wie sieht ein exaktes $(1-\beta)$-Konfidenzintervall für τ aus?
b) Hier ist eine Stichprobe aus einer Exponentialverteilung mit nicht verratenem Parameter α.
0.532 2.199 1.395 0.767 1.208 1.380 1.499 2.701 0.907 3.474
Finden Sie ein 95% - Konfidenzintervall für α!

Aufgabe 38 : $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und uniform verteilt auf $[0, \vartheta]$.
a) Zeigen Sie, dass $\max(X_1, \ldots, X_n)$ suffizient und vollständig für ϑ ist.
b) Ist $2\overline{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ? Ist es der wirksamste? Wenn nicht, wie sieht dieser aus?

Aufgabe 39 : $X_1, \ldots, X_n, n \geq 3$, seien unabhängig und Poisson(α)-verteilt, $\alpha > 0$. Finden Sie den wirksamsten erwartungstreuen Schätzer für α^3.

Aufgabe 40 : *Das Folgende ist die endliche und eindimensionale Variante eines in der Vorlesung vorgestellten und dort nicht bewiesenen Satzes - und trifft schon den Kern der Sache.*
Der Wertebereich B von X sei endlich. Unter $\mathrm{Ws}_c, c \in C(\subseteq \mathbb{R})$, seien die Verteilungsgewichte von X von der Form $K(c)e^{cV(x)}A(x)$ mit einem $V : B \to \mathbb{R}$ und strikt positiven $A(x)$. Die Menge C enthalte ein offenes, nichtleeres Intervall I. Zeigen Sie: $V(X)$ ist vollständig.

Hinweis: Nehmen Sie erst einmal an, daß das Intervall I den Nullpunkt enthält. Zeigen Sie, daß die Gültigkeit von

$$\sum_{v \in V(B)} e^{cv}\, \psi(v) = 0, \quad c \in I,$$

das Verschwinden von ψ impliziert. Wie ist ψ zum Nachweis der Vollständigkeit von $V(X)$ zu wählen? Zeigen Sie schließlich, daß man durch geeignete Umparametrisierung immer die Bedingung $0 \in I$ erreichen kann.