

# Übungen zur Vorlesung „Statistik“

Abgabetermin: Mo., 4. Februar 02, in der Vorlesung

**Aufgabe 45 :** Berechnen Sie im normalen linearen Modell den Maximum-Likelihood-Schätzer für  $(\bar{\mu}, \sigma^2)$ .

**Aufgabe 46 :** Von zwei Objekten mit unbekanntem Gewichten  $w_1$  und  $w_2$  werden die Gewichte der Einzelobjekte, die Summe und die Differenz ihrer Gewichte gemessen; jede dieser 4 Messungen ist mit einem unabhängigen Fehler derselben Varianz behaftet. Als Messwerte ergeben sich 3, 3, 1, 7.

- a) Stellen Sie ein lineares Modell  $\mathfrak{Y} = C\beta + \sigma\mathfrak{Z}$  auf.
- b) Finden Sie die KQ-Schätzer für  $w_1$  und  $w_1 - w_2$  sowie deren geschätzte Streuung.
- c) Testen Sie die Hypothese  $H_0 : w_1 = w_2$ .

**Aufgabe 47 :** Wir betrachten das Modell

$$Y_{ijk} = \alpha + \beta_i + \gamma_j + \delta_{ij} + \sigma Z_{ijk}$$

mit  $i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2;$

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 &= \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ \delta_{11} + \delta_{12} &= \delta_{21} + \delta_{22} = 0, \\ \delta_{11} + \delta_{21} &= \delta_{12} + \delta_{22} = 0, \end{aligned}$$

$(Z_{ijk}) =: \mathfrak{Z}$  standard-normalverteilt.

- a) Finden Sie den Kleinst-Quadrate-Schätzer für  $\delta_{11}$ .
- b) Erfinden Sie einen Datensatz, in dem  $\sigma^2$  mit 1 geschätzt wird und in dem der  $F$ -Test für die Hypothese  $\delta_{ij} = 0 \quad \forall i, j$  einen  $p$ -Wert.
  - i)  $< 0.05$
  - ii)  $> 0.05$  ergibt.

**Aufgabe 48 :** In einer Studie des Elastizitätsmoduls von Gummi ( $y$ ) als Funktion seines Anteils an Dicumylperoxid ( $x_1$ ) und seiner Temperatur ( $x_2$ ) wurde das Modell

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2$$

betrachtet (L.A. Wood, J. Res. Nat. Bur. Stand., 76A, 51-59). Geben Sie auf Grund der folgenden Daten Konfidenzintervalle für die Parameter  $\beta_i$  an und machen Sie sich ein Bild von den Residuen. Führen Sie dasselbe Programm ohne den  $x_1 x_2$ -Term durch, und berichten Sie über die Adäquatheit der Modelle.

Dicumylperoxid	Temperatur(°C)						
	-50	-25	0	25	50	75	100
0.48	3.20	3.06	2.92	2.77	2.63	2.49	2.35
0.95	3.54	3.57	3.59	3.62	3.65	3.67	3.70
1.90	4.85	5.01	5.165	5.32	5.47	5.63	5.78
2.86	6.24	6.57	6.91	7.24	7.57	7.91	8.24
3.81	7.80	8.14	8.47	8.81	9.15	9.49	9.82
4.76	7.60	8.37	9.14	9.91	10.68	11.45	12.22
6.66	10.60	11.61	12.62	13.62	14.63	15.64	16.65
7.62	12.80	13.92	15.04	16.17	17.29	18.41	19.53
9.52	17.30	18.20	19.00	19.90	20.80	21.60	22.50
14.3	19.20	22.09	24.97	27.86	30.75	33.64	36.52
19.0	29.15	32.53	35.91	39.30	42.68	46.06	49.45
23.8	35.90	38.50	41.10	43.70	46.30	48.90	51.50